

---

# Metode și procedee de ajustare a datelor pe baza seriilor cronologice utilizate în analiza tendinței dezvoltării diferitelor domenii de activitate social-economică

**Prof. univ. dr. Constantin ANGHELACHE**

*Universitatea Artifex/ASE - București*

**Prof. univ. dr. Gabriela-Victoria ANGHELACHE**

*Academia de Studii Economice - București*

**Lector univ. dr. Florin Paul Costel LILEA**

*Universitatea Artifex - București*

**Drd. Andreea Gabriela BALTAC**

*Academia de Studii Economice – București*

## Abstract

*Statistica studiază, prin metode specifice, inclusiv tendința de dezvoltare, cunoscută în literatura de specialitate sub **denumirea de trend**, încercând separarea influenței factorilor esențiali (cu acțiune sistematică), de influența factorilor accidentali, care fac ca între termenii empirici și cei teoretici să existe abateri. Cu cât influența factorilor accidentali este mai pronunțată, cu atât gradul de variație de la o unitate de timp la alta este mai mare și linia/curba de tendință este mai dificil de identificat.*

*Practic, **prin operația de ajustare**, se obțin serii cronologice calculate, evidențiind tendința de dezvoltare înlocuind seriile empirice*

**Cuvinte cheie:** *dinamică, fenomen, termen, date, dispersie*

\*\*\*

**Seriile cronologice**, referindu-se la fenomenele social-economice, pot prezenta variații foarte mari de la o perioadă la alta. Variațiile manifestă tendințe diferite, care corespund legității interne, ce determină dezvoltarea fenomenelor respective.

---

Specific fenomenelor sociale este faptul că acțiunea sistematică a cauzelor esențiale este modificată de influența cauzelor neesențiale, nu numai în interiorul aceleași perioade de timp, ci și în dinamică. Fenomenele social-economice, fiind influențate în dinamică, nu numai de acțiunea factorilor esențiali, prezintă abateri mai mari sau mai mici de la linia generală teoretică, care, în sens statistic, exprimă legitatea de dezvoltare specifică fiecărei etape.

La analiza unor serii dinamice se poate desprinde fie tendința de apropiere către aceeași valoare a creșterilor absolute înregistrate de la an la an, fie tendința de apropiere a ritmurilor de creștere cu baza în lanț.

Dacă datele seriei în funcție de timp se reprezintă grafic se poate observa că unele fenomene se dezvoltă de formă rectilinie și altele de formă curbilinie.

Dacă seria de date se referă la o perioadă mai lungă, se pot întâlni și cazuri când o tendință de dezvoltare rectilinie se transformă într-o tendință de dezvoltare exponențială și ulterior într-o tendință rectilinie.

Alte serii dinamice prezintă variații repetabile (cu caracter ciclic) în funcție de modificarea anotimpurilor, altele în funcție de factorii conjuncturali de producție și de piață și mai rar se întâlnesc serii cronologice ai căror termeni par să se distribuie cu totul independent unul față de altul. În cadrul unei serii dinamice, termenii nu pot fi cu totul independenți între ei, ca în cazul seriilor de distribuție unde fiecare termen este independent față de celălalt și este legat de o anumită probabilitate de apariție, concretizată în frecvența sa de manifestare. În cadrul seriilor dinamice interdependența dintre termeni trebuie privită în sensul că, fiecare depinde de nivelul precedent și, într-o anumită măsură, toți termenii seriei îi determină și pe următorii. Ca exemplu: producția lunii februarie nu este cu totul independentă de condițiile și, respectiv, de nivelul producției din luna ianuarie a aceluiași an. Mai mult, analizând cauzele și condițiile de bază ale producerii fenomenelor, se poate constata că ele se modifică sistematic, de la o unitate la alta, ca urmare a unor acumulări cantitative treptate ce pot fi urmărite în cadrul unei etape întregi de dezvoltare. Interdependența obiectivă dintre termenii unei serii dinamice imprimă evoluției fenomenelor cercetate o anumită tendință, care, datorită faptului că fenomenele sunt influențate în dinamica lor și de factorii întâmplători, nu poate fi cunoscută decât printr-o **analiză teoretică și practică a tuturor termenilor seriei respective**.

*Prin ajustarea termenilor unei serii de date statistice, în sensul cel mai larg, se înțelege operația de înlocuire a termenilor reali cu termeni teoretici și exprimă legitatea specifică de dezvoltare obiectivă a fenomenelor la care se referă datele[1]. În cazul seriilor dinamice legitatea de dezvoltare se analizează în funcție de timp. Variabila de timp nu trebuie considerată în*

---

sine ca factor determinant, ci ca un mijloc de sintetizare în mod succesiv a influenței sistematice a factorilor care acționează în cadrul acelorași condiții de bază, dar cu dimensiuni diferite.

În cazul ajustării seriilor dinamice, **dispersia totală**, care sintetizează mărimea medie a variației produse de influența tuturor factorilor, se descompune în dispersia calculată pe baza variației termenilor reali de la valorile ajustate în funcție de timp, plus dispersia calculată pe baza variației valorilor ajustate de la media termenilor seriei dinamice.

*Dispersia totală:*

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

*Dispersia termenilor seriei de la valorile ajustate* ( $\sigma_{y/z}^2$ ) sintetizează influența factorilor reziduali – factori neînregistrați – care, în cazul seriilor dinamice, sunt toți factorii în afară de factorul timp:

$$\sigma_{y/z}^2 = \frac{\sum (y_i - Y_{t_i})^2}{n}$$

unde:

$Y_{t_i}$  = valoarea teoretică a variabilei  $y$  în funcție de timp.

*Dispersia valorilor ajustate de la valoarea medie* ( $\sigma_{y/t}^2$ ), sintetizează variația produsă numai de modificarea factorului timp; considerând toți ceilalți factori ca fiind neesențiali și cu acțiune constantă în toate cazurile:

$$\sigma_{y/t}^2 = \frac{\sum (Y_{t_i} - \bar{y})^2}{n}$$

De subliniat că valorile teoretice (ajustate) în funcție de timp se pot stabili folosind mai multe procedee de calcul.

*Condiția esențială* a aplicării corecte a unui procedeu sau altul de ajustare este ca numărul termenilor seriei să fie suficient de mare pentru a putea intra în câmpul de acțiune al **Legii numerelor mari**, asigurând o compensare reală a abaterilor întâmplătoare[1]. Este cunoscut, de asemenea, faptul că legitatea de dezvoltare a unui fenomen nu se poate urmări decât în cadrul unei etape întregi, în cadrul căreia condițiile de bază ale producerii fenomenelor se schimbă numai cantitativ. Numai atunci când această condiție – număr suficient de mare de termeni – este satisfăcută, se poate desprinde în mod veridic tendința (trendul) de dezvoltare a fenomenului respectiv.

În teoria și practica statistică se folosesc mai frecvent pentru ajustare metodele și procedee de ajustare pe baza mediilor mobile; prin metoda grafică; pe baza sporului mediu; pe baza indicelui mediu de creștere și prin ecuațiile funcțiilor analitice calculate folosind procedeul celor mai mici pătrate.

• *Ajustarea pe baza mediilor mobile*

Se folosește, în special, acolo unde variația termenilor unei serii dinamice prezintă un aspect de regularitate ciclică. Prin calcularea mediilor mobile se înlătură variația ciclică și se prezintă seria de date cu o variație lină, continuă.

Mediile mobile sunt medii parțiale, calculate dintr-un număr prestabilit de termeni, în care se înlocuiește pe rând primul termen cu termenul ce urmează în seria care trebuie să fie ajustată.

**Mediile mobile** sunt cunoscute și ca medii glisante sau alunecătoare.

Se consideră, de exemplu, o serie formată din opt termeni ( $y_i$ ), care urmează să fie ajustați prin procedeul mediilor mobile,  $\bar{y}_i$  calculate din câte trei termeni.

Mediile mobile:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; & \bar{y}_4 &= \frac{y_4 + y_5 + y_6}{3}; \\ \bar{y}_2 &= \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}; & \bar{y}_5 &= \frac{y_5 + y_6 + y_7}{3}; \\ \bar{y}_3 &= \frac{y_3 + y_4 + y_5}{3}; & \bar{y}_6 &= \frac{y_6 + y_7 + y_8}{3};\end{aligned}$$

Ajustarea se face după modelul:

Valori empirice ( $y_i$ )	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$
		→	↑	↑	↑	↑	↑	
Valori ajustate ( $\bar{y}_i$ )	–	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_6$	

Rezultă că s-a obținut un număr mai mic de medii mobile decât numărul termenilor seriei empirice. Din opt termeni s-au obținut șase medii mobile. Aceasta înseamnă, în general, că se obțin atâtea medii mobile câți termeni are seria, mai puțin cu numărul termenilor din care s-au calculat mediile, micșorat cu o unitate. Dacă  $n$  este numărul termenilor seriei și numărul termenilor pentru fiecare medie mobilă ( $n'$ ), numărul mediilor mobile va fi:  $n - (n' - 1)$ .

În acest caz operația de ajustare devine relativ ușoară, deoarece, calculând mediile dintr-un număr impar de termeni, fiecare medie se plasează în dreptul unui termen real al seriei care *corespunde cu poziția termenului central*. Dacă se calculează medii mobile dintr-un număr par de termeni, fiecare medie mobilă se plasează la mijlocul termenilor, (între cei doi termeni centrali). Pentru a putea face ajustarea termenilor în aceste condiții se calculează mediile mobile din câte doi termeni ai seriei ajustate. Mediile mobile inițiale se numesc medii mobile provizorii (notate cu  $\bar{y}_i$ ), iar în a doua etapă se obține medii mobile definitive sau centrate (notate cu  $\bar{\bar{y}}_i$ ):

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\bar{y}_2 + \bar{y}_3}{2} \text{ etc.}$$

Ajustarea termenilor se face după următorul model (seria din opt termeni și medii mobile din câte patru termeni):

Valori empirice ( $y_i$ )	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$
medii mobile provizorii $\bar{y}_i$	-	-	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$	-
medii mobile provizorii $\bar{\bar{y}}_i$	-	-	$\bar{\bar{y}}_1$	$\bar{\bar{y}}_2$	$\bar{\bar{y}}_3$	$\bar{\bar{y}}_4$	-	-

În cazul în care ajustarea se face pe baza mediilor mobile calculate din număr par de termeni, mediile mobile se obțin în două trepte:

- medii mobile provizorii ( $\bar{y}_i$ ), care se plasează între termenii seriei;
- medii mobile definitive sau centrate ( $\bar{\bar{y}}_i$ ) care se plasează în dreptul termenilor seriei și cu care se face ajustarea termenilor seriei inițiale.

• *Ajustarea pe baza metodei grafice*

Se reprezintă grafic seria de date empirice și se trasează, vizual, dreapta sau curba care unește cele două puncte extreme ale seriei cronologice, astfel încât să aibă abateri minime față de poziția valorilor reale în grafic. Ajustarea vizuală se bazează pe ipoteza că acțiunea tuturor cauzelor ar fi fost constantă pe toată perioada, imprimând tuturor termenilor aceeași formă de creștere absolută sau relativă și care poate fi interpretată pe baza liniei/curbei valorilor reale luate în funcție de timp.

Graficul folosit pentru reprezentarea unei serii dinamice (cronograma) este bazat pe sistemul coordonatelor rectangulare, în care timpul este trecut pe axa absciselor (OX), indicatorii urmăriți fiind folosiți pentru stabilirea scării de reprezentare pe axa ordonatelor (OY)[1].

---

Rezultă că ajustarea pe baza reprezentării grafice constituie un instrument de apreciere a tendinței de dezvoltare, în funcție de care se poate alege însăși metoda (procedeul) ce trebuie folosită în estimarea tendinței de lungă și scurtă durată.

În general, se acceptă ca fiind mai bun mijloc de ajustare procedeul care, aplicat la seria de date empirice, permite obținerea unor termeni teoretici care dă abateri minime de la valorile reale corespunzătoare. În cazul prezentat, ținând seama de alura graficului, este de așteptat ca valorile teoretice care corespund ajustării de forma unei progresii aritmetice (sporul mediu și ecuația liniei drepte) să dea cele mai mici abateri. Pentru verificare se pot folosi mai multe procedee de calcul, fiind ales cel care satisface cel mai bine condiția de minim.

• *Ajustarea pe baza sporului mediu*

Folosită atunci când, prelucrând datele din serie, se obțin sporuri individuale cu baza în lanț apropiate ca valoare unele de altele. Aceasta corespunde, în fapt, unei creșteri a nivelurilor caracteristicii studiate sub forma unei progresii aritmetice cu rația egală cu sporul mediu.

**Ajustarea pe baza sporului mediu** se bazează pe relația care există între primul termen (sporurile cu baza în lanț) și ultimul termen:

$$y_n = y_0 + \Sigma_{1/0} + \Sigma_{2/1} + \Sigma_{3/2} + \dots + \Sigma_{n/n-1}.$$

Dacă se admite că abaterile în plus și minus ale sporurilor individuale față de sporul mediu sunt minime și se compensează reciproc, devin:

$$y_n = y_0 + \underbrace{\bar{\Delta} + \bar{\Delta} + \bar{\Delta} + \dots + \bar{\Delta}}_{de\ n\ ori}$$

adică:

$$y_n = y_0 + n\bar{\Delta}$$

Pe baza relațiilor respective se pot scrie pe rând toți termenii progresiei aritmetice. Se consideră timpul dintre cei doi termeni extremi ai seriei ca o variabilă statistică, cu valori de la  $t_1 \dots t_n$ .

În teoria și practica statistică se obișnuiește ca termenii ajustați să se noteze cu  $Y$  pentru a-i deosebi de termenii seriei empirice care se notează cu  $y$ .

Folosind acest procedeu se obține:

$$Y_{t_i} = y_0 + t_i\bar{\Delta}$$

unde:

$y_0$  = termenul considerat ca bază de ajustare;

$t_i$  = variabila de timp luată în raport cu baza de ajustare folosită.

---

Urmează ca, pentru a afla un termen ajustat pe baza sporului mediu, să fie ales termenul ca bază de ajustare la care se va adăuga sporul mediu luat de un număr de unități de timp egale cu poziția pe care termenul respectiv o are față de termenul ales ca bază.

Nu în toate cazurile poate fi folosit ca an de ajustare anul de bază al seriei, deoarece atunci nu se ține seama decât de diferența de mărime dintre primul și ultimul termen al seriei. Pentru a mări gradul de precizie a ajustării, este indicat ca alegerea bazei de ajustare să se facă după ajustarea vizuală. Se alege din grafic acel termen care, prin poziția sa, se apropie cel mai mult de linia dreaptă teoretică ce unește cele două puncte extreme ale seriei. Se apreciază că în punctul respectiv s-a realizat cel mai bine relația de progresie aritmetică dintre primul termen, sporurile anuale cu baza în lanț și ultimul termen. Pentru seria prezentată, care urmează, în general, forma de progresie aritmetică, nu este necesar să se schimbe baza de ajustare. Când se va alege o altă bază de ajustare se vor obține valori de timp cu sens negativ pentru termenii care se găsesc înaintea termenului respectiv și valori de timp pozitive pentru termenii următori.

Ecuția de ajustare:

$$Y_{it} = y_0 \pm t_i \Delta$$

Se obțin două progresii aritmetice: una descrescătoare, calculată de la baza de ajustare către termenii precedenți, și alta crescătoare, calculată către ultimii termeni ai seriei.

• *Ajustarea pe baza indicelui mediu de creștere*

Folosită atunci când termenii au tendință de creștere sub forma unei progresii geometrice, în care rația poate fi considerată ca egală cu indicele mediu de creștere ( $\bar{I}$ ).

Ajustarea se bazează pe relația dintre primul termen, indicii de creștere cu baza în lanț și ultimul termen. Dacă ultimul termen se scrie în funcție de primul, atunci va fi egal cu primul termen multiplicat succesiv cu indicii cu baza în lanț:

$$y_n = y_0 \cdot I_{1/0} \cdot I_{2/1} \cdot I_{3/2} \dots I_{n/n-1}$$

Dacă indicii cu baza în lanț au valori apropiate, valorile pot fi substituite cu valoarea indicelui mediu de creștere. Aceasta se bazează pe relația dintre indicii cu baza în lanț și valoarea medie a lor. Se obține:

$$y_n = y_0 \cdot \underbrace{\bar{I} \cdot \bar{I} \cdot \bar{I} \dots \bar{I}}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

de unde:

$$y_n = y_0 \cdot \bar{I}^n$$

---

Și în acest caz se pot stabili toți termenii progresiei geometrice, calculați în funcție de baza de ajustare și rație. Un termen oarecare ajustat este egal cu termenul ales ca bază, înmulțit cu indicele mediu de creștere ridicat la o putere egală cu numărul unităților de timp corespunzătoare poziției sale față de termenul de bază. Dacă termenul ales ca bază de ajustare este în interiorul seriei, atunci ecuațiile termenilor ajustați devin:

$$Y_{t_i} = y_0 \cdot \bar{I}^{\pm t_i}$$

• *Ajustarea prin Metoda celor mai mici pătrate*

Ajustarea seriilor cronologice prin procedeele prezentate se bazează pe relația care există între primul și ultimul termen al seriei luată în funcție de numărul termenilor și exprimată sub formă de mărime absolută – sporul mediu – sau sub formă de mărime relativă – indicele mediu de creștere. Procedeele respective sunt cunoscute în literatura de specialitate și sub denumirea de procedee mecanice. Este cunoscut că asupra formei de variație influențează și termenii intermediari ai unei serii dinamice, care pot prezenta abateri de la modificarea sistematică produsă de legitatea care le generează. În acest sens, seria cronologică poate fi considerată ca o variabilă în timp, care se formează ca o funcție de forma:

$$y = f(t_i)$$

unde:

t = valorile variabilei independente (timpul);

y = valorile variabilei dependente (fenomenele prezentate în seria cronologică).

În practica statistică, cel mai frecvent se întâlnesc fenomenele care, în dinamica lor, apar sub forma unor funcții liniare, exponențiale, parabolice sau a unei hiperbole. În continuare se prezintă **ajustarea pe baza funcțiilor liniare, exponențiale și parabolice, ca fiind cel mai des utilizate în ajustarea seriilor cronologice.**

Alegerea funcției care corespunde cel mai bine formei reale de evoluție a fenomenelor se face tot pe baza unei analize atente a graficului și indicatorilor absoluți și relativi ce caracterizează seria empirică de date.

În cazul când graficul arată o tendință de creștere absolută constantă, verificată și printr-o variație mică a sporurilor cu baza în lanț, se poate aprecia că fenomenul crește după o funcție liniară printr-o ecuație de estimare:

$$Y_{t_i} = a + bt_i$$

unde:

$Y_{t_i}$  = valorile teoretice ale caracteristicii ce trebuie ajustată, calculată în funcție de valorile caracteristicii factoriale (t);



---

$a$  = parametrul care are sens de mărime medie și arată la ce valoare ar fi ajuns caracteristica rezultativă  $y$ , dacă influența tuturor factorilor, în afara celui înregistrat, ar fi fost constantă pe toată perioada;

$b$  = parametrul care sintetizează numai influența caracteristicii factoriale ( $t$ ) și care în sens geometric arată gradul de înclinație a liniei/curbei de ajustare. În ecuațiile de ajustare a unei serii cronologice  $b$  nu poate să fie decât pozitiv, în cazul seriilor cu tendință obiectivă de creștere continuă, și negativ când seria prezintă tendința de scădere continuă;

$t_i$  = valorile caracteristicii factoriale care, în cazul seriilor dinamice, este timpul.

În cazul în care graficul arată o tendință de creștere relativ, constantă, respectiv creșteri absolute din ce în ce mai mari, verificată și prin obținerea unor valori apropiate ale indicilor cu baza în lanț, se poate aprecia că fenomenul crește de forma unei *funcții exponențiale*, având ecuația de estimare:

$$Y_{ti} = ab^{ti}$$

Când pe grafic se obține o curbă care are fie un punct de maximum, fie un punct de minim, se apreciază că fenomenul studiat se modifică în timp sub forma unei *parabole de gradul doi*. Se pot întâlni cazuri frecvente când pe grafic apare numai o secțiune de parabolă crescătoare sau descrescătoare specifică numai anumitor etape. În acest caz este necesar să se aprecieze, prin compararea cu altă etapă precedentă, care este tendința de lungă durată și să se ajusteze seria în consecință.

Ecuația de estimare a unei parabole de gradul doi exprimată în funcție de timp:

$$Y_{ti} = a + bt_i + ct_i^2$$

Ca și în cazul corelației, pentru aflarea parametrilor funcției de regresie necesare ajustării seriei se aplică Metoda celor mai mici pătrate:

$$\sum (y_i - Y_{ti})^2 = \min$$

În cazul funcției liniare condiția devine:

$$\sum [(y_i - (a + bt_i))]^2 = \min$$

Pentru a putea satisface condiția respectivă este necesar să se determine valorile celor doi parametri  $a$  și  $b$ . Se folosește sistemul de ecuații normale, care măsoară legătura liniară dintre variabila independentă  $x$  și variabila dependentă  $y$ . Înlocuind pe  $x_i$  cu  $t_i$  rezultă:

$$\left\{ \begin{array}{l} na + b\sum t_i = \sum y_i \\ a\sum t_i + b\sum t_i^2 = \sum t_i y_i \end{array} \right\}$$

Analizând variația variabilei  $y_i$  în funcție de timp, s-a constatat că nu depinde de timp, ci de alți factori endogeni și exogeni.

Analizând gradul de dependență dintre caracteristica de timp  $t$  și volumul producției unui produs sau pe total, la nivel micro sau macroeconomic pentru care trebuie să se calculeze valorile ajustate  $Y$ , se poate constata că producția nu este în funcție de timp. Volumul producției de energie electrică – ca orice fenomen social-economic în general - depinde de o serie de alți factori a căror influență este prezentă în toate unitățile de timp. Producția depinde, printre altele, de gradul de înzestrare tehnică, de gradul de calificare a muncii, de modul de organizare a procesului de muncă etc. În cazul în care acești factori nu acționează, simplul fapt că a mai trecut un an nu duce la modificarea ei. Timpul nu face decât să sintetizeze în funcție de periodicitatea seriei influența combinată a tuturor factorilor de influență sistematici și aleatori, esențiali și neesențiali, obiectivi și subiectivi. Din acest motiv, pentru a anihila influența variației de timp, se pune condiția:

$$\sum t_i = 0$$

Pentru  $\sum t_i = 0$ , sistemul de ecuații normale prezentat devine:

$$\begin{cases} na = \sum y_i \\ b \sum t_i^2 = \sum t_i y_i, \end{cases} \quad \text{de unde: } a = \frac{\sum y_i}{n}, \quad b = \frac{\sum t_i y_i}{\sum t_i^2}$$

Rezolvând sistemul de ecuații se demonstrează că valoarea lui  $a$  este egală chiar cu media seriei, respectiv valoarea formată numai pe baza influenței constante a cauzelor esențiale, deoarece:

$$a = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}$$

Condiția aplicării procedurii de ajustare este  $\sum t_i = 0$ . Pentru a satisface această condiție trebuie să se considere originea valorilor de timp ca fiind în centrul seriei. Seria va fi divizată în două părți, în care numărul unităților de timp negative trebuie să fie egal cu numărul celor pozitive. În cazul când seria este formată dintr-un număr impar de termeni, originea variației valorilor de timp va fi chiar în dreptul termenului central și variația de timp se va măsura în intervale întregi:  $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$  etc.

În cazul unei serii dinamice formate dintr-un număr par de termeni, originea valorilor de timp va cădea între cei doi termeni centrali și variația de timp se va măsura în jumătăți de intervale de timp:  $\pm 1; \pm 3; \pm 5$  etc.;  $0$  fiind la  $\frac{1}{2}$  din distanța  $-1$  și  $+1$ [2].

---

În cazul ajustării pe baza funcției exponențiale condiția de minimum:

$$\Sigma(y_i - Y_{ti})^2 = \min$$

devine:

$$\Sigma[y_i - (ab^{t_i})]^2 = \min$$

Fiind o funcție exponențială, ecuația mediei de tendință devine:

$$\log \bar{Y}_{t_i} = \log a + t_i \log b$$

Sistemul de ecuații normale, pentru legătura de formă exponențială, se adaptează pentru cazul în care variabila factorială  $x$  este considerată variabila de timp  $t$ , respectiv:

$$n \log a + \log b \Sigma t_i = \Sigma \log y_i$$

$$\log a \Sigma t_i + \log b \Sigma t_i^2 = \Sigma(t_i \log y_i)$$

care, pentru aceeași condiție pusă la seriile dinamice, ca  $\Sigma t_i = 0$ , sistemul devine:

$$n \log a = \Sigma \log y$$

$$\log b \Sigma t_i^2 = \Sigma(t_i \log y_i)$$

unde:

$$\log a = \frac{\Sigma \log y_i}{n}$$

$$\log b = \frac{\Sigma(t_i \log y_i)}{\Sigma t_i^2}$$

Prin logaritmare, sistemul de ecuații normale este asemănător cu cel obținut pentru funcția liniară, cu deosebirea că se folosesc logaritmi, iar valorile celor doi parametri  $a$  și  $b$  se obțin prin antilogaritmare rădăcinilor sistemului.

Pentru verificarea obiectivității funcției folosite se reprezintă grafic seriile dinamice ale valorilor reale și ale valorilor teoretice calculate pe baza ecuațiilor de regresie de tip exponențial.

În cazul în care ajustarea seriei cronologice se face după ecuația unei funcții de forma unei parabole de gradul 2, sistemul de ecuații normale adaptate la factorul timp:

$$\left\{ \begin{array}{l} na + b\sum t_i + c\sum t_i^2 = \sum y_i \\ a\sum t_i + b\sum t_i^2 + c\sum t_i^3 = \sum t_i y_i \\ a\sum t_i^2 + b\sum t_i^3 + c\sum t_i^4 = \sum t_i^2 y_i \end{array} \right\}$$

Punând condiția ca  $\sum t_i = 0$ , toate puterile impare sunt nule și sistemul de ecuații normale ce trebuie rezolvate:

$$\left\{ \begin{array}{l} na + c\sum t_i^2 = \sum y_i \\ b\sum t_i^2 = \sum t_i y_i \\ a\sum t_i^2 + c\sum t_i^4 = \sum t_i^2 y_i \end{array} \right\}$$

Din ecuația a doua se calculează parametrul  $b$ , care este același ca și în ecuația liniei drepte, iar din ecuațiile prezentate se formează un nou sistem în  $a$  și  $c$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} na + c\sum t_i^2 = \sum y_i \\ a\sum t_i^2 + c\sum t_i^4 = \sum t_i^2 y_i \end{array} \right\}$$

Rezolvând sistemul, se obțin valorile celor doi parametri și având ecuația medie de tendință, cu care se calculează ecuațiile individuale în funcție de valorile lui  $t$  și se face ajustarea.

Și în acest caz se reprezintă pe același grafic și datele reale și datele ajustate și dacă abaterile dintre cronograma empirică și cea teoretică sunt nesemnificative înseamnă că funcția de ajustare este bine aleasă.

#### Bibliografie selectivă

- [1] Anghelache, C. (2008) - „Tratat de statistică teoretică și economică”, Editura Economică, București
- [2] Biji, E. et al. (2012) – “Statistică pentru economiști”, Editura Economică, București
- Anghelache, C., Bugudui, E., Deatcu, C. (2011) – “Elemente de econometrie teoretică și aplicată”, Editura Artifex, București
- Bardsen, G., Nymagen, R., Jansen, E. – “The Econometrics of Macroeconomic Modelling”, Oxford University Press, 2005, ISBN 0-19-924649-1, 978-19-9246496
- Bernardin, C. – “Hydrodynamics for a System of Harmonic Oscillators Desturbed by a Conservative Noise”, article published by the review “Stochastic Processes and their Applications”, Volume 117, no. 4, April 2007, Orlando USA, ISSN 0304-4149