O problemă de tip Laplace pentru latici regulate cu obstrucții secțiuni circulare

D. BARILLA
email:dbarilla@unime.it
A. FEMINÓ
afemino@unime.it
A. PUGLISI
puglisia@unime.it
E. SAITTA
esaitta@unime.it
Universitatea din Messina
B. TOADER
bogdantd@yahoo.com
Universitatea Creştină "Dimitrie Cantemir"

Abstract

În această lucrare, calculăm probabilitatea ca un segment având o poziţie aleatoare şi lungime constantă să intersecteze o latură a unei latici regulate cu obstrucţii secţiuni circulare. Obţinem apoi, drept cazuri particulare, formula unei probabilităţi stabilită deja de Caristi şi de Stoka, precum şi formula probabilităţii lui Laplace. Rezultatele pot fi utile pentru posibile aplicaţii în economie şi în inginerie, în particular la rezolvarea problemelor de transport.

Cuvinte cheie: probabilitate geometrică, geometrie stochastică, mulţimi aleatoare, mulţimi convexe aleatoare şi geometrie integrală.

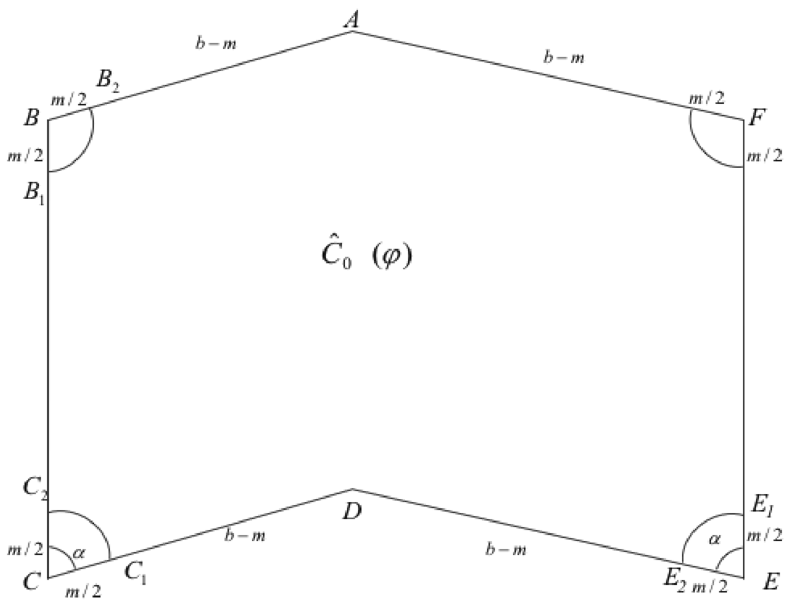
1. Introducere

Pornind de la unele probleme studiate recent în articolele [1] şi [2], considerăm, în această lucrare, o latice regulată cu celula fundamentală reprezentată în figura 1 şi calculăm probabilitatea ca un segment având o poziţie aleatoare şi lungime constantă să intersecteze o latură a acestei latici, adică probabilitatea ca segmentul respectiv să intersecteze o latură a celulei fundamentale a laticii regulate. Drept cazuri particulare ale studiului nostru, obţinem formula unei probabilităţi stabilită deja în lucrarea [1], precum şi formula probabilităţii lui Laplace.

2. Celule cu obstrucţii secţiuni circulare

Fie $\Re(a,b,m;\alpha)$ laticea regulată având celula fundamentală C_0 reprezentată în figura 1, unde $m < \min(a,b)$, iar $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ este un unghi arbitrar. Obstrucţiile sunt secţiuni circulare de două tipuri:

Figura 1



Avem:

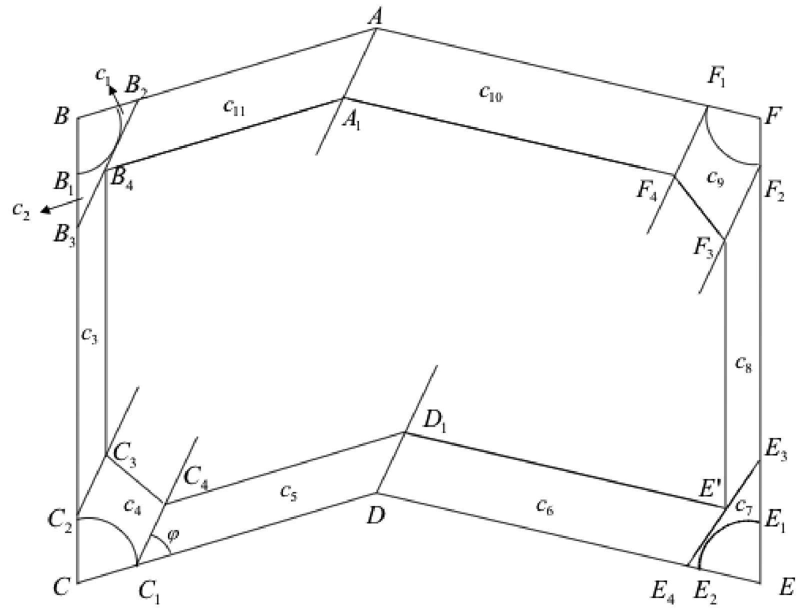
$$aria\ C_0 = 2ab\sin\alpha - \frac{\pi m^2}{4}. \qquad (1)$$

Considerăm un segment s având o poziţie aleatoare şi lungime constantă l, cu $l < \min\left(a-m, b-\frac{m}{2}\right)$, şi calculăm probabilitatea P_{int} ca acest segment să intersecteze o latură a laticii, adică probabilitatea ca segmentul s să intersecteze o latură a celulei fundamentale C_0.

Poziţia segmentului s este determinată de mijlocul său O şi de unghiul φ pe care segmentul îl formează cu latura *CD* a celulei fundamentale C_0.

Pentru a calcula probabilitatea P_{int}, considerăm poziţiile limită ale segmentului s pentru o valuare fixată a lui φ. Fie $\hat{C}_0(\varphi)$ poligonul obţinut din aceste poziţii, reprezentat în figura 2:

Figura 2

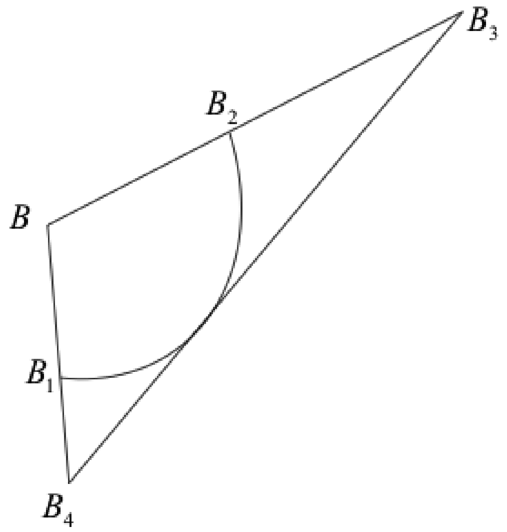


Conform figurii 2, putem scrie:

$$aria\,\hat{C}_0(\varphi) = aria\ C_0 - \sum_{i=1}^{11} aria\ c_i(\varphi) \quad (2)$$

Considerăm figura următoare:

Figura 3



Din relaţia

$$aria\ sectiunii\ circulare\ BB_1B_2 = \frac{(\pi-\alpha)m^2}{8},$$

rezultă că

$$aria\ c_1(\varphi) + aria\ c_2(\varphi) = \frac{l^2 \sin\varphi \sin(\alpha-\varphi)}{2\sin\alpha} - \frac{(\pi-\alpha)m^2}{8} \qquad (3)$$

Avem, de asemenea,

$$aria\ c_3(\varphi) = \frac{l}{2}\sin(\alpha-\varphi)\left(a - \frac{m}{2} - \frac{l\sin\varphi}{\sin\alpha}\right) \qquad (4)$$

şi, în mod similar,

$$aria\ segmentului\ circular\ C_1C_2 = \frac{m^2(\alpha - \sin\alpha)}{8}$$

şi

$$aria\ c_4(\varphi) = \frac{ml}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right) - \frac{m^2(\alpha-\sin\alpha)}{8}. \qquad (5)$$

Înlocuind α cu $\pi - \alpha$, obţinem

$$aria\, c_9(\varphi) = \frac{ml}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right) - \frac{m^2(\pi - \alpha - \sin\alpha)}{8}. \quad (6)$$

Avem şi

$$aria\ sectiunii\ circulare\ EE_1E_2 = \frac{\alpha m^2}{8}$$

şi atunci

$$aria\, c_7(\varphi) = \frac{l^2 \sin(2\alpha - \varphi)\sin(\alpha - \varphi)}{2\sin\alpha} - \frac{\alpha m^2}{8} \quad (7)$$

şi

$$aria\, c_5(\varphi) = \left(b - \frac{m}{2}\right)\frac{l}{2}\sin\varphi\,. \quad (8)$$

Procedând asemănător, obţinem

$$aria\, c_6(\varphi) = \left[b - \frac{l\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}\right]\cdot\frac{l}{2}\sin(2\alpha - \varphi) \quad (9)$$

şi

$$aria\, c_8(\varphi) = \left[a - \frac{m}{2} - \frac{l\sin(2\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}\right]\cdot\frac{l}{2}\sin(\alpha - \varphi). \quad (10)$$

De asemenea,

$$aria\, c_{10}(\varphi) = \left(b - \frac{m}{2}\right)\cdot\frac{l}{2}\sin(2\alpha - \varphi) \quad (11)$$

şi

$$aria\, c_{11}(\varphi) = \left[b - \frac{l\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha}\right]\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi\,. \quad (12)$$

Înlocuind în (2) expresiile (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) şi (12), obţinem

$$aria\,\hat{C}_0(\varphi) = aria\,C_0 - \left\{ \frac{l^2 \sin\varphi \sin(\alpha-\varphi)}{2\sin\alpha} - \frac{(\pi-\alpha)m^2}{8} + \right.$$

$$+\left(a-\frac{m}{2}-\frac{l\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)\frac{l}{2}\sin(\alpha-\varphi)+$$

$$+\frac{ml}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)-\frac{m^2(\alpha-\sin\alpha)}{8}+$$

$$+\frac{ml}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)-\frac{m^2(\pi-\alpha-\sin\alpha)}{8}+$$

$$+\frac{l^2\sin(2\alpha-\varphi)\sin(\alpha-\varphi)}{2\sin\alpha}-\frac{\alpha m^2}{8}+$$

$$+\left(b-\frac{m}{2}\right)\frac{l}{2}\sin\varphi+\left[b-\frac{l\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}\right]\cdot\frac{l}{2}\sin(2\alpha-\varphi)+$$

$$+\left[a-\frac{m}{2}-\frac{l\sin(2\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}\right]\cdot\frac{l}{2}\sin(\alpha-\varphi)+$$

$$+\left(b-\frac{m}{2}\right)\cdot\frac{l}{2}\sin(2\alpha-\varphi)+$$

$$\left.+\left[b-\frac{l\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha}\right]\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi\right\}=$$

$$= aria\,C_0 - \left\{\frac{l}{2}\left[2a\sin\alpha+\left(2b-\frac{m}{2}\right)\sin 2\alpha\right]\cos\varphi + \right.$$

$$\frac{l}{2}\left[2b+\frac{m}{2}-(2a-m)\cos\alpha-\left(2b-\frac{m}{2}\right)\cos 2\alpha\right]$$

$$\left.\sin\alpha-\frac{l^2}{2}\sin(2\alpha-\varphi)-\frac{m^2}{2}(\pi-\sin\alpha)\right\}. \qquad (13)$$

Notăm cu M mulţimea segmentelor s al căror mijloc se găseşte în celula fundamentală C_0 şi cu N mulţimea segmentelor s conţinute în întregime în celula fundamentală C_0. Atunci putem scrie (a se vedea [4]):

$$P_{int} = 1 - \frac{\mu(N)}{\mu(M)}, \qquad (14)$$

unde μ este măsura Lebesgue în planul euclidian. Calculăm măsurile $\mu(M)$ şi $\mu(N)$ folosind măsura cinematică a lui Poincaré (a se vedea [3]). Dacă x şi y sunt coordonatele mijlocului segmentului s, iar φ este unghiul de mai sus, atunci putem scrie

$$\mu(M) = \int_0^\alpha d\varphi \iint_{\{(x,y)\in C_0\}} dxdy = \int_0^\alpha [aria\, C_0] d\varphi = \alpha \cdot aria\, C_0 \qquad (15)$$

şi

$$\mu(N) = \int_0^\alpha d\varphi \iint_{\{(x,y)\in \hat{C}_0(\varphi)\}} dxdy = \int_0^\alpha \left[aria\, \hat{C}_0(\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \alpha \cdot aria\, C_0 - \left\{ \frac{l}{2}\left[2a \sin\alpha + \left(2b - \frac{m}{2}\right)\sin 2\alpha \right]\sin\varphi - \right.$$

$$\frac{l}{2}\left[2b + \frac{m}{2} - (2a - m)\cos\alpha - \left(2b - \frac{m}{2}\right)\cos 2\alpha \right]\cdot$$

$$\left. \cos\varphi - \frac{l^2}{4}\cos(2\alpha - \varphi) - \frac{m^2}{2}(\pi - \sin\alpha)\varphi \right\}\Bigg|_0^\alpha =$$

$$= \alpha \cdot aria\, C_0 - \left(\left\{ \left[2a \sin\alpha + \left(2b - \frac{m}{2}\right)\sin 2\alpha \right]\sin\alpha + \right.\right.$$

$$+ \left[2b + \frac{m}{2} - (2a - m)\cos\alpha - \left(2b - \frac{m}{2}\cos 2\alpha\right)\right]$$

$$\left.(1 - \cos\alpha)\right\}\frac{l}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{4} l^2 - \left.\frac{\alpha(\pi - \sin\alpha)m^2}{2}\right). \qquad (16)$$

Din relaţiile (2), (14), (15) şi (16), obţinem

$$P_{int} = \frac{1}{\alpha\left(2ab\sin\alpha - \frac{\pi m^2}{4}\right)}\left(\left\{\left[2a\sin\alpha + \left(2b - \frac{m}{2}\right)\sin 2\alpha\right]\sin\alpha + \right.\right.$$

$$\left. + \left[2b + \frac{m}{2} - (2a - m)\cos\alpha - \left(2b - \frac{m}{2}\cos 2\alpha\right)\right](1 - \cos\alpha)\right\}$$

$$\left.\frac{l}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{4} l^2 - \frac{\alpha(\pi - \sin\alpha)m^2}{2}\right). \quad (17)$$

Pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, celula fundamentală devine un dreptunghi cu laturile a şi $2b$ şi cu patru sferturi de cerc de rază $\frac{m}{2}$. În acest caz, probabilitatea (17) devine

$$P = \frac{2(a + 2b)l - l^2 - \frac{\pi(\pi - 1)m^2}{2}}{\pi\left(2ab - \frac{\pi m^2}{4}\right)},$$

formulă obţinută deja în [1]. În plus, pentru $m \to 0$, obţinem formula probabilităţii lui Laplace:

$$P = \frac{2(a + 2b)l - l^2}{2\pi ab}.$$

Bibliografie

[1] Caristi, G., Stoka, M. (în curs de apariţie). *A Laplace type problem for a regular lattice with convex-concave cell and different obstacles*, General Mathematics.

[2] Caristi, G., Stoka, M. (în curs de apariţie). *A Laplace type problem for a regular lattice with obstacles (I)*, Atti. Acc. Sci. Torino.

[3] Poincaré, H. (1912). *Calcul des probabilitiés*, 2nd ed. Carré, Paris.

[4] Stoka, M. (1975-1976). *Probabilités géométriques de type Buffon dans le plan euclidien*, Atti Acc. Sci. Torino, Vol. 110, 53-59.