
Modelarea în condiții de timp continuu și discret

Conf. univ. dr. Mădălina Gabriela ANGHEL (madalinagabriela_angel@yahoo.com)

Universitatea „Artifex” din București

Drd. Alexandra PETRE (alexandra.olteanu.sl@anaf.ro)

Academia de Studii Economice din București

Drd. Cristian OLTEANU (alexandra.olteanu.sl@anaf.ro)

Academia de Studii Economice din București

Abstract

Modelarea în cazul portofoliilor, este un proces deosebit de delicat. Există suficient de multe teorii care atestă o modalitate sau alta de acțiune. Cu toate acestea, în stabilirea unui model apt de a fi utilizat, trebuie să se realizeze în primul rând un studiu bazat pe evoluția browniană care definește procesul ratelor dobânzilor pe termen scurt. Apoi, după ce se clarifică acest aspect, trebuie să se realizeze aproximarea variabilelor care intră în model, în condiții de timp continuu și timp discret.

Putem utiliza și termenii de timp discret sau timp continuu, acestea având aceeași semnificație. Aproximarea în timp discret se poate face prin metoda Euler sau după metoda locală de liniarizare. În articol sunt exprimate situațiile concrete în cazul celor trei posibilități despre care am amintit. De asemenea, studiul se îndreaptă și către rezultatele empirice privind modelarea ratelor dobânzilor pe termen scurt.

Desigur pentru a modela ratele dobânzii pe termen scurt, trebuie aplicate aproximările Euler sau Milestein pentru datele cu rate scurte. Luând un exemplu se precizează care este evoluția acestora în timp. De asemenea, trebuie constatat că în cazul acestor modele, trebuie verificat cu atenție verificarea autocorelației, testarea normalității precum și compararea cu rezultatele modelului estimativ Kerls. Datele respective sunt prezentate succesiv și asigură înțelegerea fenomenului la care ne referim.

Cuvinte cheie: *timp continuu, timp discret, modele, teste, coeficienți, semnificație, evoluții, prognoză*

Clasificarea JEL: C10, E43

Introducere

Trecerea unui model de timp continuu la un model de timp discret nu este o problemă ușoară. Vom aborda diverse proceduri de a transforma modelele de timp continuu în modele cu timp discret. Există multe metode pentru a converti modelele de timp continuu în variante de timp discrete. În acest sens amintim metoda Euler, metoda Milstein ca metode de liniarizare.

Problema generică este valabilă pentru un studiu amănunțit în domeniul finanțelor empirice. Vom analiza problemele metodologice cu privire la modelarea datelor privind rata dobânzii pe termen scurt. Mișcările dobânzilor pe termen scurt au devenit esențiale pentru teoriile prețurilor activelor, prețurile obligațiunilor și studiile structurii pe termen lung. Valoarea instrumentelor derivate, evaluările neutre ale riscurilor și teoria dinamică a portofoliului, dar și pentru comportamentul macroeconomic, cum ar fi comportamentul de consum și investiții și ratele de schimb, sunt la fel de importante și sensibile. De aceea ne vom concentra pe modelarea procesului dobânzilor pe termen scurt.

După unele explorări metodologice, vom încerca prin câteva exemple să estimăm ratele dobânzilor pe termen scurt. Rezultatele testelor de specificație ale autocorelației și normalității indică faptul că procedura urmată este completă și supusă unor riscuri. Cunoaștem că modelul ARMA-ARCH cu volatilitate dependentă de nivel are o performanță mai bună decât modelele cu timp continuu în ceea ce privește valorile probabilistice, testele de specificație, precum și previziunile din eșantion și în afara acestuia.

Literature review

Anghelache și Anghel (2019) abordează în lucrarea lor problemele legate de modelarea diverselor fenomene economice prin studii de caz în concordanță cu teoria economică. Anghelache și Anghel (2018), studiază și prezintă rezultatele unor studii de caz, analizate prin metode de modelare econometrică a fenomenelor economice. Anghelache și Anghel (2016) abordează conceptele teoretice ale modelării econometrice a fenomenelor economice. Anghelache (2012) analizează principalele aspecte ale modelării economice. Brenner et al. (1996) abordează în lucrarea lor problema alocării dinamice a activelor sub inflație. Chan et al. (1992) prezintă o comparație empirică a modelelor alternative ale ratei dobânzii pe termen scurt. Cox et al. (1985a) prezintă o teorie a structurii care caracterizează ratele dobânzii. Newbold, Karlson și Thorne (2010) prezintă o serie de aspecte referitoare la statistica de afaceri. Turnovsky (2000) studiază principalele metode utilizate în macroeconomie. Vasicek (1977) analizează și caracterizează echilibrul termenilor structurii ratelor dobânzii.

Metodologie, date, rezultate și discuții

• Studiu privind evoluția în timp

La început vom considera o evoluție browniană care definește un proces al ratelor dobânzilor pe termen scurt. În general, un proces brownian este soluția unei ecuații diferențiale stochastice (SDE) de forma:

$$dX_t = b(X_t, \theta)dt + a(X_t, \theta)dW_t \quad (1)$$

unde $(dW_t)_{t \geq 0}$ o este o mișcare browniană. În teoria finanțelor moderne, procesele de difuzie sunt adesea folosite pentru modelarea datelor din seriile de timp financiare, de exemplu rata dobânzii pe termen scurt. Rata dobânzii pe termen scurt este importantă în caracterizarea structurii termenului a ratelor dobânzii, ceea ce înseamnă structura ratelor dobânzii cu scadențe diferite, precum și în crearea prețurilor la cererile contingente ratei dobânzii. Unii autori Vasicek (1977) sau Cox et al. (1985a) sunt pionieri în domeniu. Un studiu al unor lucrărilor este prezentat în Chan et al. (CKLS, 1992). Chan et al. (1992) arată că multe modele cu un factor pentru rate scurte pot fi sintetizate prin relația:

$$dX_t = (c - \beta X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t \quad (2)$$

Caracteristica acestei ecuații este aceea că are un coeficient de derivare în medie-inversare și un coeficient de difuzie dependent de nivel. Un astfel de cadru în timp continuu, deși poate oferi elemente teoretice, implică unele dificultăți în cercetarea empirică. Prima problemă este modul de estimare a parametrilor acestui model continuu. Sunt multe metode și încercări pentru a implementa estimările. Printre acestea amintim metoda inferenței indirecte, metoda aproximativă a probabilității, metoda generală a momentului în ceea ce privește generatoarele de difuziune, metoda eficientă a momentului, metoda nonparametrică, metoda de aproximare a densității, care au abordat noua liniarizare locală sugerând și formalizând o serie de posibilități de modelare concretă.

A doua problemă de modelare în timp continuu este de a judeca specificațiile modelului folosit în raport cu datele empirice. De exemplu, se pot oferi teste de specificație pentru procesele de difuzie. Vom folosi trei metode de transformare, astfel încât să putem rezolva simultan cele două probleme. Cele trei metode de transformare sunt metoda Euler, metoda Milstein și metoda NLL. Aceste trei metode furnizează modele în timp discret pentru datele observate în timp discret ale unui proces de difuzie.

Putem a implementa estimarea probabilității maxime și predicția este destul de ușor, folosind aceste modele menționate. Pentru testarea

specificațiilor de model ale celor trei modele cu timp discret, urmărim următoarea strategie. Folosind aproximările în timp discret, putem transforma cu ușurință seria de timp economică într-un proces de zgomot alb, care este distribuit în mod normal. Deci, testăm dacă zgomotul alb estimat pentru fiecare model aproximativ de timp discret este în mod normal distribuit. Intuiția este că, dacă aproximarea în timp discret reprezintă corect procesul de generare a datelor, atunci putem elimina toată structura deterministă. Cu cât structura deterministă este mai evidentă, cu atât putem prognoza mai bine datele. Vom compara performanța celor trei aproximări în timp discret.

Aproximarea Euler este cea mai simplă și cea mai comună aproximare în timp discret. Dezavantajul acesteia este că estimatorul Euler nu este consecvent. Pentru a obține rezultate superioare, sunt sugerate aproximările Milstein și NLL. Îmbunătățirea acestor aproximări este reprezentată de erori mai mici ale estimărilor parametrilor în experimentele numerice.

Evaluarea modelelor aproximative în timp discret, pe lângă luarea în considerare a exactității estimării parametrilor, impune exactitatea predicției. În cazul în care coeficientul este liniar, descoperim că aproximările Euler și NLL sunt echivalente în reparametrizare, având același predictor. Putem deduce o relație funcțională între estimarea aproximării Euler și estimarea aproximării NLL. Folosind această relație putem evidenția performanța mai bună a aproximării.

În experimentul numeric, nu trebuie să luăm în considerare metoda NLL. Noi comparăm doar aproximările Euler și Milstein din experimentul numeric folosind simulările Monte-Carlo. Rezultatele nu verifică superioritatea aproximării Milstein față de aproximarea Euler. Estimările parametrilor și predicțiile cu un pas înainte ale celor două modele sunt similare, datorită dimensiunilor mici ale parametrilor de abatere. Dimensiunea mică a parametrilor are același efect ca pașii mici de discretizare, deoarece variabila observată evoluează mai puțin în cazul parametrilor mai mici și pentru intervale de evoluție mai scurte.

Cunoaștem că dacă etapele de discretizare, sunt mici, atunci efectul discretizării, este de asemenea mic. Motivul angajării unor parametri mici se datorează faptului că sunt sugerați de rezultatele empirice ale datelor. Considerând specificația modelului, determinăm zgomotul alb estimat al modelelor Euler și Milstein. Zgomotul alb estimat al celor două aproximări trece testul de specificații în majoritatea simulărilor. Prin urmare, modelele aproximative Euler și Milstein pot identifica corect structura deterministă a datelor reale. De asemenea, descoperim că aproximarea Milstein reduce efectul în timp continuu mai bun decât aproximarea Euler în ceea ce privește distribuția zgomotului alb estimat. Observăm că pentru o mare frecvență de respingere a testului de distribuție a metodei Milstein este mai mică decât

pentru metoda Euler. Pe lângă experimentul numeric, aplicăm modelele aproximative ale Euler și Milstein la datele privind rata dobânzii pe termen scurt. Ca și în experimentul numeric, implementăm estimarea ML, predicția cu un pas înainte, și testăm specificația modelului. Două modele aproximative funcționează în mod similar. Rezultatele de aici indică o diferență semnificativă între datele simulate și cele reale: niciuna dintre datele cu rată scurtă nu poate trece testul de specificație într-un mod satisfăcător.

Se impune existența zgomotului alb și, în consecință, trebuie să identificăm noi modele care să explice autocorelarea. Datele simulate de acele modele cu timp continuu nu pot explica cu precizie autocorelația ridicată a zgomotului alb.

Deoarece nu putem găsi un model adecvat în cadrul timpului continuu, apelăm la cel de timp discret. Utilizăm modelul autoregresiv pentru a exprima autocorelațiile ridicate ale zgomotului alb estimat. Constatăm că putem modela autocorelația zgomotului estimat, luând mai multe întârzieri în modele. Prin rezumarea celor două strategii de modelare, utilizăm modelul cu ARMA-ARCH cu volatilitate dependentă de nivel. Modelul îl generalizează pe cel al lui Brenner et al. (1996) prin utilizarea structurii ARMA. Precizăm că modelele aproximative Euler și NLL sunt echivalente în reparametrizare. Aproximările Euler și Milstein vor fi aplicate datelor reale pentru o perioadă scurtă. Putem folosi modelul ARMA-ARCH cu volatilitate dependentă de nivel pentru a modela ratele dobânzilor pe termen scurt.

• Modele de aproximare în timp discret

Dificultatea estimării probabilității maxime (ML) bazată pe observația în timp discret este bine cunoscută în literatura de specialitate. În cele ce urmează, folosim modele aproximative în timp discret, astfel încât estimarea ML, predicția și testul de specificație a modelului să fie realizabile. Prezentăm pe scurt cele trei metode de aproximare în timp discret: Euler, Milstein și noua metodă de liniarizare locală (NLL).

- Metoda Euler

Ideea metodei Euler este de a înlocui dt cu un interval de timp δt pentru a obține o aproximare în timp discret pentru procesul de difuzie X :

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = b(X_{t_i}, \theta) \Delta t_i + a(X_{t_i}, \theta) \Delta W_{t_i} \quad (3)$$

Milstein Method

Metoda Milstein aproximează SDE prin următoarea relație:

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = b(X_{t_i}, \theta) \Delta t_i + a(X_{t_i}, \theta) \Delta W_{t_i} + \frac{1}{2} a(X_{t_i}) a'(X_{t_i}) ((W_{t_i})^2 - \Delta t_i) \quad (4)$$

unde $\Delta t_i = (t_{i+1} - t_i)$ și $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$. Expansiunea majoră a ordinului de convergență 1,0. Mai are un termen în plus față de metoda Euler care este extinderea a ordinului de convergență 0,5.

Trebuie să facem două observații:

- a) Așa cum am menționat, putem aplica expansiunea Taylor a diferitelor ordine de convergență pentru a obține aproximări diferite în timp discret pentru procesul de difuzie. Așadar, aceste modele sunt utilizate de obicei pentru simulare, dar nu pentru estimare. Utilizând astfel de modele cu timp discret pentru estimarea probabilității maxime, funcțiile lor de densitate sunt complicate, iar maximizarea funcției de probabilitate este instabilă.
- b) Metoda Milstein este doar o metodă de simulare mai bună pentru procesele de difuzie atunci când mărimea pasului de simulare tinde către zero. Dacă pașii sunt fixați de timpii de observație $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, ca în cazul de față, atunci nu putem evidenția superioritatea metodei Milstein.

- Noua metodă locală de liniarizare

Noua metodă de liniarizare locală (NLL) are la bază ideea următoare: metoda Euler păstrează constant driftul și coeficientii de difuzie pentru $s \in [t_i, t_{i+1}]$, în timp ce NLL aproximează coeficientul de abatere $b(X_s)$ până la termenii de ordinul al doilea folosind formula:

$$dX_s = \left(b(X_{t_i}) + b'(X_{t_i})(X_s - X_{t_i}) + \frac{1}{2} b''(X_{t_i}) a^2(X_{t_i})(s - t_i) \right) ds + a(X_{t_i}) dW_s \quad (5)$$

Coeficientul de difuzie este păstrat în continuare ca o constantă. Ecuația (5) poate fi rezolvată analitic, soluția fiind dată la t_{i+1} conform relației:

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \frac{b(X_{t_i})}{b'(X_{t_i})} \left(e^{b'(X_{t_i})(t_{i+1}-t_i)} - 1 \right) + \frac{b''(X_{t_i})}{(b'(X_{t_i}))^2} \frac{a(X_{t_i})^2}{2} \left(e^{b'(X_{t_i})(t_{i+1}-t_i)} - 1 - b'(X_{t_i})(t_{i+1} - t_i) \right) + a(X_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{b'(X_{t_i})(t_{i+1}-s)} dW_s \quad (6)$$

Distribuția ultimului termen poate fi realizată conform relației:

$$a(X_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{b'(X_{t_i})(t_{i+1}-z)} dW_z \sim N(0, a(X_{t_i})^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{2b'(X_{t_i})(t_{i+1}-z)} dz) \quad (7)$$

Vom arăta că Euler și predictorii NLL ai SDE (2) sunt echivalenți. Motivul constă în liniaritatea coeficientului de abatere din ecuația (2). Putem observa cu ușurință că aproximarea Euler, din relația:

$$X_{(i+1)\Delta t} - X_{i\Delta t} = (c - \beta X_{i\Delta t})\Delta t + \sigma X_{i\Delta t}^\gamma \Delta W_{i\Delta t} \quad (8)$$

și aproximarea NLL, dată de relația:

$$X_{(i+1)\Delta t} - X_{i\Delta t} = \frac{h_1(\beta)}{\beta} (c - \beta X_{i\Delta t})\Delta t + \sigma X_{i\Delta t}^\gamma \Delta W_{i\Delta t} \quad (9)$$

sunt echivalente prin reparametrizare, deoarece:

$$\begin{aligned} \beta_{eu}\Delta t &= h_1(\beta_{nll}) = 1 - e^{-\beta_{nll}\Delta t} \\ c_{eu}\Delta t &= \frac{c_{nll}}{\beta_{nll}} h_1(\beta_{nll}) \\ \gamma_{eu} &= \gamma_{nll} \\ \sigma_{eu} &= \sigma_{nll} h_2(\beta_{nll}) = \sigma_{nll} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\beta_{nll}\Delta t}}{2\beta_{nll}\Delta t}} \end{aligned} \quad (10)$$

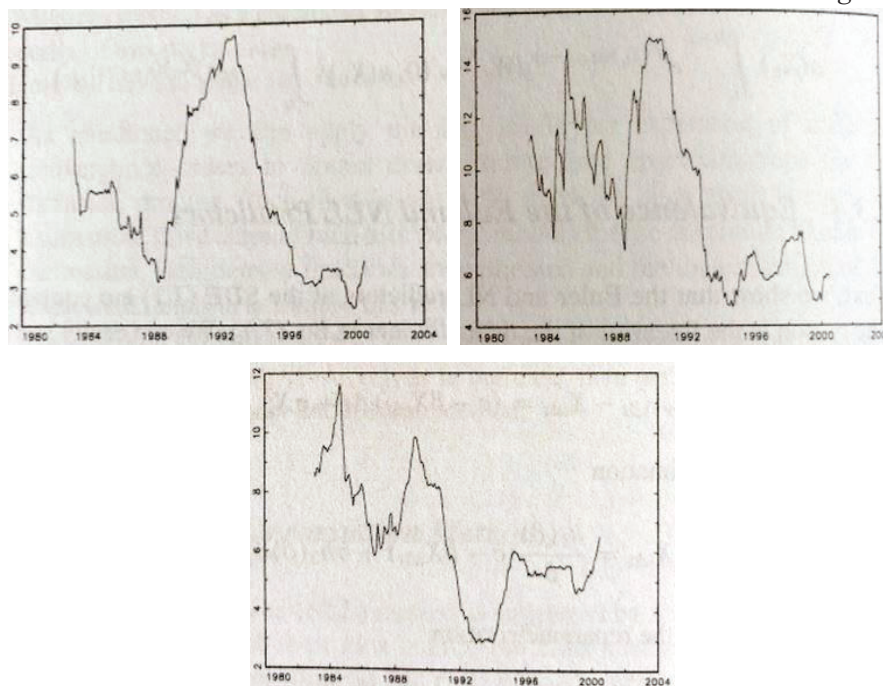
unde $U_i, i = 1, \dots$ sunt $N(0, \Delta t)$ distribuit.

• Rezultate empirice privind modelarea ratelor dobânzii pe termen scurt

Pentru a modela ratele dobânzii pe termen scurt aplicăm aproximările Euler și Milstein pe datele cu rate scurte. Seria orară a ratei de circulație a banilor este prezentată în figura 1:

Rata interbancară bazată pe indicatori economici

Figura 1



• Aplicarea testelor de specificație

Ideea principală a testelor de specificație este de a verifica dacă există structură deterministă în reziduuri. Aplicăm două teste de specificație. Primul test este de a verifica dacă reziduurile sunt corelate automat, iar al doilea este de a testa dacă reziduurile au zgomot alb.

- Verificarea autocorelației

Fie $U_1, \dots, U_N$ distribuite în mod identic, variabile aleatorii, cu $E[U_i] = 0$, $Var[U_i] = 1$ și $E|U_i|^s < \infty$, pentru toți $s \geq 2$. Fie R , funcția de autovarianță dată de relația:

$$\hat{R}_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=k+1}^N U_i U_{i-k} \quad (11)$$

unde avem $E[\hat{R}_k] = 0$ și $Var[\hat{R}_k] = \frac{1}{N-k}$, pentru $k \geq 1$

$$\hat{r}_k = \frac{\hat{R}_k - E[\hat{R}_k]}{\sqrt{Var[\hat{R}_k]}} = \sqrt{N-k} \hat{R}_k = \frac{1}{\sqrt{N-k}} \sum_{i=k+1}^N U_i U_{i-k} \quad (12)$$

Luând în considerare secvența $(U_i U_{i-k})_{i=k+1, \dots, N}$ pentru un k fix, aceasta este aproape de cea dependentă de $(U_i)_{i=1, \dots, N}$. Utilizarea centrală limitează teorema de mai sus deoarece $\hat{r}_k$ converge la $N(0,1)$ în distribuție ca $N \rightarrow \infty$. Aplicând testul pentru aproximările de timp discrete, lăsăm $U_i = W_i - W_{i-1}$. Trebuie să notăm că $\hat{r}_k \sim N(0,1)$ adică $\hat{R}_k \sim N(\frac{1}{N-k})$, este similar cu rezultatul $Var[\hat{R}_k] = \frac{1}{N}$ când N este suficient de mare.

- Testarea normalității

Vom utiliza χ^2 pentru histogramă în ideea de a testa dacă distribuția eșantioanelor este o distribuție $N(0,1)$. Ideea este de a compara frecvența relativă a eșantioanelor la intervale I_m

$$\hat{p}_m = \frac{\text{număr din } \{i; U \in I_m\}}{N} \quad (13)$$

și $\hat{p}_m$ probabilitatea distribuției $N(0,1)$ pe intervale I_m , unde $\{I_m, m = 1, \dots, M\}$ sunt intervale disjuncte ale liniei reale. Distanța ponderată

$$d = \sum_{m=1}^M \frac{N}{p_m(1-p_m)} (\hat{p}_m - p_m)^2 \quad (14)$$

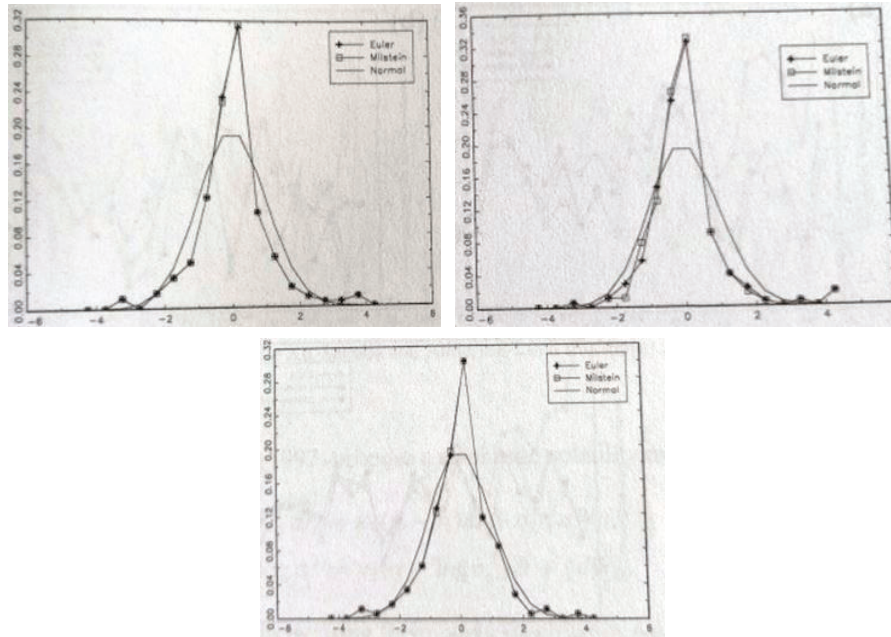
măsoară distanța dintre eșantion și distribuțiile normale și converge la: $\chi^2(M-1)$, pentru distribuția $N \rightarrow \infty$.

• Rezultatele modelului estimativ CKLS

Notările parametrilor sunt schimbate deoarece vom lua în considerare modele mai generale. Parametrii estimări, $t_{\text{statistic}}$ pentru estimări și predicții sunt similare. De asemenea, putem observa că coeficienții estimați de abatere nu diferă semnificativ de zero. Dacă acestea sunt zero, înseamnă că nu putem obține valori de prognoză mai bune decât folosirea datelor curente. Pentru a vedea dacă este posibilă reducerea erorii de prognoză prin utilizarea modelelor, soluția este să comparăm erorile de prognoză ale modelelor în raport cu cele ale prognozei primare prin utilizarea datelor curente. Așadar, rezultatele din tabele arată că nu există dovezi ale unui astfel de model. Zgomotul alb estimat al celor două aproximări este de asemenea similar și este prezentat în figura 2.

Distribuția zgomotului estimat în timp

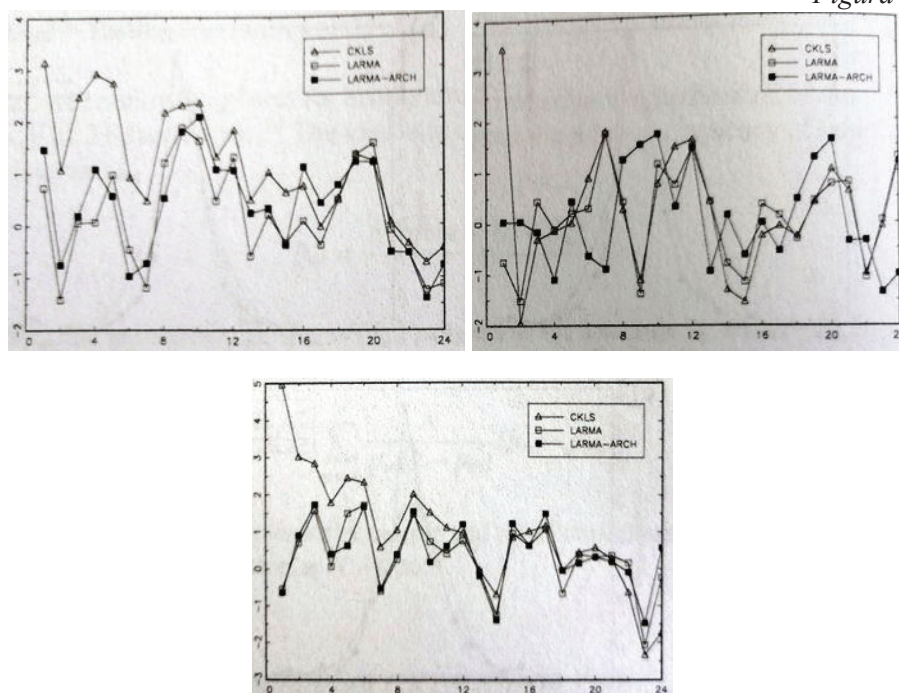
Figura 2



Se poate observa că zgomotul alb estimat este mai concentrat în jurul valorii de zero decât distribuția normală și prezintă reziduri. De asemenea, desenăm autocorelațiile normalizate date în formula (12) pentru aproximarea Euler din figura 3.

Autocorelarea normalizată a zgomotului estimat

Figura 3



Ca element de referință, prezentăm o simulare Monte Carlo pentru 1000 de repetări, folosind rezultatul estimărilor. Majoritatea acestora, și anume 96%, au autocorelații maxime normalizate mai mici de 2,8; considerând primele zece autocorelații normalizate, iar maximul este de doar 4,2.

Valorile χ^2 -test și valorile lor p sunt rezumate în figurile 1; 2 și 3.

Concluzii

Din studiul efectuat asupra modelării în condiții de timp continuu și discret se desprind o serie de concluzii. Variabilele din piața de capital, portofoliile, activele, etc., pot fi studiate în condiții de timp continuu, adică o evoluție neîntreruptă sau în condiții de timp discret.

Din studiul efectuat se desprind unele concluzii și anume în primul rând trebuie efectuată o aproximare a evoluției variabilelor factoriale în timp continuu și în timp discret.

Pentru aproximare se pot utiliza metodele Euler, Milstein method sau metoda locală de liniarizare. Acestea ajută la o aproximare a variabilelor considerate, care introduse în acest tip de model în condiții de timp continuu sau liniarizat dau efectele care se impun.

Din interpretarea rezultatelor privind rata dobânzii pe termen scurt se desprinde concluzia că pentru a modela ratele dobânzii pe termen scurt, trebuie aplicate aproximările Euler și Milstein pe date cu rate scurte exprimate în timp.

Desigur ideea principală constă în aceea că trebuie aplicate testele de specificație, verificarea autocorelației și testarea normalității, deoarece numai în aceste condiții rezultatele obținute sunt convingătoare și pot fi utilizate în studiile și deciziile care se iau în domeniu portofoliilor pe piața de capital.

Bibliografie

1. Anghelache, C., Anghel, M.G. (2019). *Modelare economică. Teorie și studii de caz*, ediția a doua, revizuită și adăugită, Editura Economică, București
2. Anghelache, C., Anghel, M.G. (2018). *Econometrie generală. Teorie și studii de caz*, Editura Economică, București
3. Anghelache, C., Anghel, M.G. (2016). *Econometrie generală. Concepte, teorie și studii de caz*, Editura Artifex, București
4. Anghelache, C. (2012). *Elemente de modelare economică*, Editura Artifex, București
5. Brennan, M.J. and Xia, Y., (2002), Dynamic asset allocation under inflation, *Journal of Finance*, 57 (3), 1201-1238
6. Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F., and Sanders, A.. (1992), An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, 47 (3), 1209-1227
7. Cox, J., Ingersoll, J., and Ross, S., (1985b), A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53 (2), 385-407
8. Newbold, P., Karlson, L.W., Thorne, B. (2010). *Statistics for Business and Economics*, 7th ed., Pearson Global Edition, Columbia, U.S.
9. Turnovsky, S. (2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*, MIT Press Cambridge
10. Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188