

---

## *Aspecte teoretice privind aversiunea față de risc*

**Prof. Constantin ANGHELACHE PhD** ([actincon@yahoo.com](mailto:actincon@yahoo.com))

Academia de Studii Economice din București / Universitatea „Artifex” din București

**Alexandru BADIU PhD Student** ([badiu@transferrapid.com](mailto:badiu@transferrapid.com))

Academia de Studii Economice din București

### **Abstract**

*În orice domeniu de activitate, trebuie avut în vedere și neprevăzutul, adică situația în care elemente (aspecte) mai puțin anticipate își pot exercita influența asupra evoluției viitoare. În termeni generali putem vorbi despre certitudini și incertitudini. Așadar, certitudinea este dată de prefigurarea unor factori care vor acționa în viitor și care pot să aibă influențe, atât pozitive cât și negative asupra evoluției economice. Incertitudinea este în esență riscul, în sensul că, în dorința de a efectua o prognoză cât mai detaliată și sigură apar variante noi care se pot manifesta în viitor fără a exista garanția că acestea se vor manifesta cu certitudine.*

*Riscul sau deciziile luate sub risc, reprezintă o problemă deosebit de sensibilă a elementelor de analiză macroeconomică și, mai ales, de previziune macroeconomică. În lucrarea de față autorii și-au propus să facă o analiză bine structurată bazată pe o largă consultare a biografiei de profil în acest domeniu, în legătură cu conceptul de risc, manifestarea riscurilor, managementul riscurilor și situația în care deciziile sub risc trebuie luate pentru a avea o prognoză, un îndreptar privind rezultatele macroeconomice care se vor produce în timp.*

**Cuvinte cheie:** risc, aversiune față de risc, funcție de utilitate, profit, asigurări, plăți, randament, grad de concavitate

**Clasificarea JEL:** E47, G24

### **Introducere**

Problemele referitoare la risc și aversiunea față de risc abordate și analizate în acest studiu sunt deosebit de sensibile, iar o serie de cercetători și economiști de frunte și-au exprimat punctele de vedere și au dat pe lângă o serie de definiții ușor diferite în ceea ce privește riscul dar și modul conceptual prin care propun realizarea de modele și metodele prin care acestea pot fi aplicate așa încât să putem efectua previziuni macroeconomice cu un bogat substrat teoretic.

Aceste concepte aplicate în practică ridică unele probleme privind bazele de date, complexitatea bazelor de date, corelația care există între indicatorii care măsoară creșterea economică și multe alte aspecte cu conținut statistic.

---

### Literature review

În lucrările publicate de Anghelache C., Niță G., Badiu A. (2016) și Oancea, D., Anghelache, C., Zugravu, B. (2013), autorii s-au aplecat asupra necesității de a clarifica unele aspecte privind luarea deciziilor sub risc. Aceștia au plecat de la premisa clară că riscurile, ca factor de incertitudine, vor apărea și se vor dezvolta chiar și atunci când se pot prevedea elementele de apariție a lor, important fiind însă ca aceste riscuri să fie previzionate și, pe cale de consecință, să se constituie rezervele financiare prin care să se acopere eventualele efecte distructive ale riscurilor în acest domeniu. Atitudinea față de risc și incertitudine a fost abordată pe larg de Kahneman, D (2010) și Tversky, A. (2000), arătând că aceasta este o latură psihologică a comportamentului uman, dar că într-o perioadă viitoare are consecințe dacă prin prognozele efectuate nu vom încerca să punem în modelul utilizat și noțiunea de risc care oricum se va manifesta. Marcowitz, H (2010, 2014) și Tobin, J. (1987), au abordat în studiile efectuate conceptul de eficiență a portofoliilor și conceptul de influență sau efect al riscurilor asupra unei evoluții viitoare.

### Metodologie, date, discuții, rezultate

Vom presupune că factorul de decizie, planifică doar pentru o singură perioadă, ceea ce înseamnă că el utilizează imediat resursele pentru a achiziționa și consuma bunuri și servicii. Activul final provine din resursele inițiale  $w$  corectat cu rezultatul oricărui risc suportat în timpul tranziției.

Putem preciza că dacă un agent avers față de risc este avertizat asupra acestuia, indiferent de nivelul resurselor  $w$ , nu va opta pentru varianta care îi va aduce profit zero:

$$Ez = 0, Eu(w + z) \leq u(w) \quad (1)$$

Observăm că orice firmă de asigurări  $z$  cu un câștig așteptat, diferit de zero, poate fi descompusă în câștigul său așteptat  $Ez$  și o asigurare zero  $z - Ez$ .

Astfel, din definiția noastră, un agent avers față de risc preferă întotdeauna să primească cu certitudine rezultatul așteptat al unei situații mai mult decât provocarea în sine. Pentru un maximizator de utilitate așteptat cu funcția de utilitate  $u$ , aceasta implică faptul că, pentru orice asigurare  $z$  și pentru orice avere inițială  $w$

$$Eu(w + z) \leq u(w + Ez) \quad (2)$$

Dacă luăm în considerare decizia agentului economic, în cazul transportării mărfurilor cu un singur cargo, averea inițială  $w$  este egală cu

4000, iar profitul Z ia valoarea 8000 daca marfa ajunge cu bine la destinație sau 0 în situația în care aceasta se pierde, ambele situații cu probabilități egale de producere.

Plecând de la premiza că agentul economic – decident este avers față de risc, atunci trebuie să urmeze:

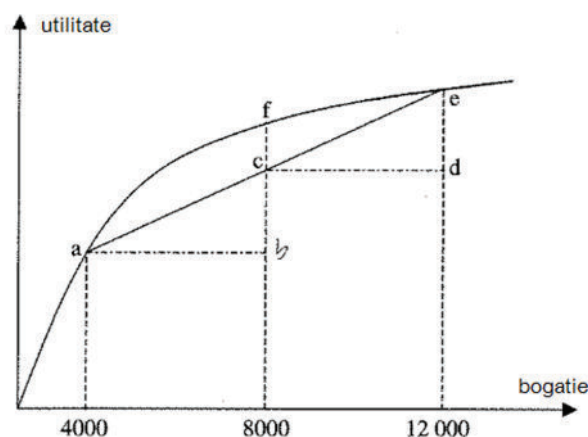
$$1/2 u(12000) + 1/2 u(4000) \leq u(8000) \quad (3)$$

În cazul în care firma ar putea găsi o companie de asigurări care ar oferi o asigurare completă la un preț actuarial echitabil de  $Ez = 4000$  de euro, ar fi mai bine să se încheie o astfel de poliță de asigurare.

Observăm cum inegalitatea (3) este verificată în figura 1.

#### Măsurarea utilității așteptate ( $4000, 1/2:12000, 1/2$ )

Figura 1



Partea dreaptă a inegalității este reprezentată de punctul „f” pe curba utilității  $u$ . Partea stângă a inegalității este reprezentată de punctul intermediar pe arc „ae”, adică prin punctul „c”. Acest lucru poate fi imediat verificat observând că cele două triunghiuri „abc” și „cde” sunt echivalente, deoarece au aceeași bază și aceleași unghiuri. Observăm că „f” este mai presus de „c”: ex ante, bunăstarea derivată din loteria  $z$  este mai mică decât bunăstarea obținută dacă s-ar obține siguranța convenită a plății anticipate  $Ez$ .

Pe scurt, decidentul nostru nu se poate confrunta cu riscuri. Intuiția rezultatului este foarte simplă: dacă utilitatea marginală este în scădere, atunci pierderea de 4000 de Euro reduce utilitatea mai mult decât creșterea utilității generată de câștigul potențial de 4000 de Euro. Văzută ex ante, utilitatea așteptată este redusă de către aceștia la fel de ponderați rezultatele potențiale.

Este demn de remarcat faptul că relațiile (1) și (3) sunt identice. Preferința către diversificare este echivalentă în mod intrinsec cu aversiunea față de risc, cel puțin în cazul modelul Bernoullian de utilitate așteptată.

Folosind argumentul opus, se poate arăta cu ușurință că, dacă  $u$  este convex, inegalitatea din (2) va fi inversată. Prin urmare, factorul de decizie preferă riscul în detrimentul așteptărilor sale matematice și el dezvăluie în acest fel înclinația sa de a-și asuma riscul. Câte comportamente individuale vor fi menționate ca fiind iubitoare de risc. În cele din urmă, dacă  $u$  este liniară, atunci bunăstarea Eu este liniară în câștigul așteptat al riscurilor. Într-adevăr, dacă  $u(x) = a + bx$  pentru orice  $x$ , atunci avem

$$Eu(w + z) = E[a + b(w + z)] = a + b(w + Ez) = u(w + Ez),$$

ceea ce implică faptul că decidentul clasifică riscurile în funcție de rezultatul așteptat. Comportamentul acestui individ se numește risc neutru.

În următoarea propoziție, demonstrăm în mod formal că inegalitatea (2) este valabilă pentru orice  $z$  și orice avere inițială  $w$  dacă și numai dacă  $u$  este concavă.

Considerăm ca un factor de decizie cu funcție utilitară  $u$  este riscul de a evita, adică inegalitatea (2) este valabilă pentru orice  $w$  și  $z$ , dacă și numai dacă  $u$  este concavă.

Dovada suficienței se bazează pe o extindere Taylor de-a doua ordine a lui  $u(w + z)$  în jurul  $w + Ez$ . Pentru orice  $z$ , acest randament:

$$u(w + z) = u(w + Ez) + (z - Ez)u'(w + Ez) + \frac{1}{2}(z - Ez)^2 u''(S(z))$$

pentru unele  $S(z)$  între  $z$  și  $Ez$ . Deoarece acest lucru trebuie să fie adevărat pentru orice  $z$ , rezultă că așteptarea  $u(w + z)$  este egală cu:

$$Eu(w + z) = u(w + Ez) + u'(w + Ez)E(z - Ez) + \frac{1}{2}E[(z - Ez)^2 u''(S(z))]$$

Observăm acum că cel de-al doilea termen al părții din dreapta de mai sus este zero, deoarece  $E(z - Ez) = Ez - Ez = 0$ . În plus, dacă  $u''$  este uniform negativ, atunci al treilea termen ia așteptarea unei variabile aleatoare  $(z - Ez)^2 u''(S(z))$  care este întotdeauna negativă, deoarece este rezultatul unui scalar pătrat și negativ  $u''$ . Prin urmare, suma acestor trei termeni este mai mică decât  $u(w + Ez)$ . Aceasta dovedește suficiența.

Necesitatea este dovedită prin contradicție. Să presupunem că  $u$  nu este concavă. Atunci acolo trebuie să existe valori ale lui  $w$  și  $m > 0$  pentru care  $u''(x)$  este pozitiv în intervalul  $[w - m, w + m]$ . Considerând un risc mic

apropiat de zero,  $n$ , înseamnă că susținerea bogăției finale  $w+n$  este în totalitate determinată ( $w-m$ ,  $w+m$ ). Folosind aceeași expansiune Taylor ca și în modul de calcul anterior, obținem randamentul:

$$Eu(w + n) = u(w) + 1/(2) E [n^2 u''(S(n))]$$

Pentru că  $S(n)$  are un suport care este conținut în  $[w - m, w+m]$  unde  $u$  este convex local,  $u''(S(n))$  este pozitiv pentru toate realizările lui  $n$ .

În consecință rezultă că:  $E[n^2 u''(S(n))]$  este pozitiv, iar  $Eu(w+n)$  este mai mare decât  $u(w)$ . Prin urmare, acceptarea situației  $n$  cu zero valori de creștere a bunăstării, când factorul de decizie nu este avers, reprezintă o contradicție.

Propunerea de mai sus nu este altceva decât o rescriere a faimoasei inegalități Jensen. Luam în considerare orice funcție cu valoare reală  $\phi$ . Inegalitatea lui Jensen afirmă că  $E\phi(y)$  este mai mică decât  $\phi(Ey)$  pentru orice variabilă aleatoare  $y$  dacă și numai dacă  $\phi$ , este o funcție concavă. Ea construiește o punte între două definiții alternative ale concavității  $u$ : negativitatea  $u''$  și proprietatea că orice arc care leagă două puncte de curba  $u$  trebuie să se situeze sub această curbă. Figura 1 ilustrează acest punct. Este intuitiv că scăderea utilității marginale ( $u'' < 0$ ) înseamnă aversiunea față de risc. Într-o lume sigură, scăderea utilității marginale înseamnă o creștere a averii cu 100 de euro care are un efect pozitiv asupra utilității care este mai mică decât efectul unei reduceri a averii cu 100 de euro.

Într-o lume nesigură, introducerea riscului de a câștiga sau de a pierde 100 de euro cu probabilitate egală va avea un impact negativ net asupra utilității așteptate. În așteptare, beneficiul perspectivei de a câștiga 100 de euro este supraestimat de costul perspectivei de a pierde 100 de euro cu aceeași probabilități. În ultimele două decenii, mulți cercetători proeminenți în domeniu au contestat ideea că aversiunea față de risc vine numai din scăderea utilității marginale, ideea conform căreia, că ar trebui să existe o legătură între cele două.

#### • Nivelul de risc premium și echivalența certitudinii

Un agent de avertizare a riscului este un agent care nu dorește riscuri zero. Calificatorul „zero mean” este foarte important. Un agent de avertizare de risc ar putea dori loteriile riscante, dacă câștigurile așteptate pe care le produc sunt destul de mari. Investitorii care se confruntă cu risc pot dori să achiziționeze active riscante dacă randamentele preconizate depășesc rata fără risc. Persoanele care se confruntă cu risc nu pot dori să cumpere asigurări dacă sunt prea costisitoare pentru a le achiziționa.

---

Pentru a determina compromisul optim între câștigul așteptat și gradul de risc, este utilă cuantificarea efectului riscului asupra bunăstării.

Acest lucru este util în special atunci când agentul subrogă decizia riscantă pentru alții, așa cum este cazul când luăm în considerare, de exemplu, politica de siguranță publică sau gestionarea portofoliului de către fondurile de pensii.

Este important să cuantificăm gradul de aversiune față de risc, pentru a ajuta oamenii să cunoască mai bine și să ia decizii mai bune în fața incertitudinii. Cea mai mare parte a acestei lucrări se referă tocmai la această problemă.

În mod evident, oamenii au atitudini diferite față de riscuri. Unii sunt gata să cheltuiască mai mulți bani decât alții pentru a scăpa de un risc specific.

O modalitate de măsurare a gradul de aversiune față de risc a unui agent este să-l întrebăm cât este dispus să plătească pentru a scăpa de un risc zero. Întrebarea va fi menționată drept prima de risc  $\pi$  asociată cu acest risc. Pentru un agent cu funcție de utilitate  $u$  și avere inițială  $w$ , prima de risc trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

$$Eu(w + z) = u(w - \pi) \quad (4)$$

Agentul ajunge la aceeași bunăstare fie prin acceptarea riscului, fie prin plata primei de risc  $\pi$ . Când riscul  $Z$  are o așteptare care diferă de zero, de obicei folosim conceptul de echivalent de certitudine. Echivalentul de certitudine al riscului  $Z$  este cu siguranță creșterea avuției care are același efect.

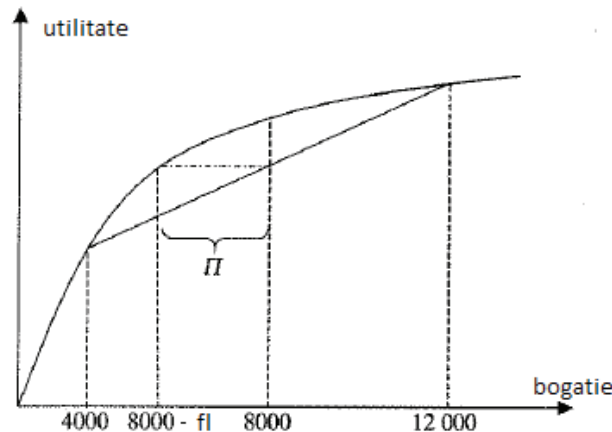
$$Eu(w + z) = u(w + e) \quad (5)$$

Când  $Z$  are o valoare zero, comparând relațiile (4) și (5) implică faptul că echivalentul de certitudine al lui  $Z$  este egal cu minusul primei sale de risc  $\pi$ .

O consecință directă a relației 2 este că prima de risc  $\pi$  este non-negativă. În figura 2, măsurăm  $\pi$  pentru riscul  $(-4000, \frac{1}{2}, 4000, \frac{1}{2})$  pentru averea inițială  $w = 8000$ . Observăm mai întâi că riscul prima este zero când  $u$  este liniară și este non-pozitivă atunci când este - convexă.

### Măsurarea primei de risc $P$ a riscului $(-4000, \frac{1}{2}; 4000, \frac{1}{2})$

Figura 2



când averea inițială este  $w=8000$

O proprietate foarte convenabilă a primei de risc este aceea că este măsurată în aceleași unități ca și bogăția, respectiv în euro, în cazul agentului nostru economic. Măsura satisfacției sau utilității este greu de comparat între diferiți indivizi.

Prima de risc este o funcție complexă a distribuției lui  $Z$  a avuției inițiale  $w$  și a funcției utilitare  $u$ . Putem estima suma pe care agentul este gata să o plătească pentru eliminarea riscului, prin examinarea riscurilor mici. Presupunem că  $Ez = 0$ .

Folosind o aproximare Taylor de ordinul doi și de prima ordine pentru partea stângă și partea dreaptă a ecuației (4), obținem că:

$$\begin{aligned} u(w - \Pi) &\cong u(w) - \Pi u'(w) && \text{și} \\ Eu(w + z) &\cong E[u(w) + zu'(w) + 1/2 z^2 u''(z)] \\ &= u(w) + u'(w)Ez + 1/2 u''(w)Ez^2 \\ &= u(w) + 1/2 u''(w)Ez^2, \end{aligned}$$

unde  $Ez = 0$  și  $Ez^2 = \sigma^2$  este variația rezultatului. Înlocuirea acestor două aproximări în ecuația (4) determină randamente că  $Ez = 0$ .

$$\Pi \cong \frac{1}{2} \sigma^2 A(w) \quad (6)$$

unde funcția  $A$  este definită ca:

$$A(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)} \quad (7)$$

---

Sub aversiunea față de risc, funcția  $A$  este pozitivă. Ar fi zero sau negativ pentru un agent neutru la risc sau care iubesc riscul. Notăm în continuare funcția  $A(-)$  ca fiind gradul absolut al aversiunii riscului. Vedem că prima de risc asociat cu riscul pentru un agent cu avere  $w$  este aproximativ egal cu jumătate din produsul varianței  $Z$  și gradul de aversiune a riscului absolut al agentului evaluat la  $w$ .

Ecuția (6) este cunoscută ca aproximarea Arrow-Pratt, așa cum a fost dezvoltată independent de Arrow (1963) și Pratt (1964).

Costul riscului, măsurat prin prima de risc, este aproximativ proporțional cu variația câștigurilor sale. Astfel, varianța poate părea a fi o măsură bună a gradului de risc al unei loterii. Această observație a determinat mulți autori / cercetători să utilizeze un criteriu de decizie de variație medie pentru modelarea comportamentului sub risc.

Într-un model de variație medie, presupunem că atitudinile individuale față de risc depind nu numai de media și de variația riscurilor subiacente. Valoarea acestor valori depinde de gradul de acuratețe al aproximării (6), și poate fi considerată ca fiind o problemă foarte mică sau prea mare.

În astfel de cazuri, abordarea medie a varianței pentru deciziile cu risc, care a jucat un rol istoric foarte important în dezvoltarea teoriei finanțelor, poate fi văzută ca un caz special al teoriei utilității așteptate.

În cele mai multe cazuri însă, prima de risc asociată cu orice risc mare va depinde, de asemenea, de celelalte momente ale distribuției riscului, nu doar de media și varianța acestuia. De exemplu, pare intuitiv dacă  $X$  este sau nu distribuit simetric cu privire la aspectele sale medii pentru determinarea primei de risc. Gradul de ascundere (adică cel de-al treilea moment) ar putea afecta foarte bine dorința unui risc.

Prin urmare, două riscuri cu aceeași medie și varianță, dar una cu o distribuție care este înclinată în dreapta și cealaltă cu o distribuție care este înclinată spre stânga, nu ar trebui să fie așteptată să aibă neapărat aceeași primă de risc. Un argument similar poate fi făcut și despre kurtosis (al patrulea moment), care este legată de masa de probabilitate din cozile distribuției.

În acest stadiu, trebuie remarcat faptul că, cel puțin pentru riscuri mici, prima de risc crește cu mărimea riscului proporțional cu pătratul de această dimensiune. Pentru a vedea acest lucru, să presupunem că  $z = ks$ , cu  $E_s = 0$ . Parametrul  $k$  poate fi interpretat ca fiind o măsură a riscului. Atunci când  $k$  tinde la zero, riscul devine foarte mic.

Desigur, prima de risc este o funcție a mărimii riscului. Ne putem aștepta ca această funcție  $ll(k)$  să crească cerneala. Suntem interesați să descriem forma funcțională care leagă prima de risc  $n$  de dimensiunea  $k$  a riscului. Deoarece varianța  $z$  este egală cu  $k^2$  ori varianța lui  $s$ , obținem acest lucru:

$$\Pi \cong \frac{1}{2} k^2 m_n^2 A(w)$$

adică prima de risc este aproximativ proporțională cu pătratul mărimii riscului. Din această observație putem concluziona în mod direct că nu numai  $f(k)$  se apropie de zero, deoarece  $k$  se apropie de zero, dar și  $f'(0) = 0$ . Aceasta este o proprietate importantă a teoriei utilității așteptate.

La margine, acceptarea unui risc mic, sau zero, nu are niciun efect asupra bunăstării agenților care evită riscul. Spunem că aversiunea față de risc este un fenomen de ordinul doi. Proprietatea Tois în modelele generale, care nu se limitează la utilitatea așteptată, se numește „aversiune de risc secundară”. Cu modelul de utilitate așteptat, această proprietate se bazează pe prezumția că funcția de utilitate este diferențiată. Maximizatorii de utilitate așteptați, sunt toți risc neutri.

*Dacă funcția de utilitate este diferențiată, prima de risc tinde la zero ca pătrat al mărimii riscului.*

În continuare, vom arata că  $IT'(0) = 0$ , așa cum este sugerat de aproximarea Arrow-Pratt în comentariile noastre de mai sus. Relația dintre  $IT$  și  $k$  poate fi obținută prin diferențierea completă a ecuației :

$$E_u(w + ks) = u(w - IT(k)), \text{ cu privire la } k.$$

$$\Pi'(k) = \frac{E s u'(w + ks)}{u'(w - IT(k))} \quad (8)$$

În mod direct deducem că  $IT'(0) = 0$ , deoarece prin presuposiția  $Es = 0$

#### • Gradul de aversiune față de risc

Vom lua în considerare următoarea problemă de decizie simplă, în care un agent economic acceptă oferta de a-și asuma riscul situației  $z$  cu media  $\mu$ , și varianța  $\sigma^2$ . Desigur, decizia optimă este acceptarea situației dacă:

$$Eu(w + z) \geq u(w) \quad (9)$$

sau, în mod echivalent, dacă echivalentul de certitudine  $e$  al lui  $Z$  este pozitiv. În cele ce urmează, vom examina modul în care această decizie este afectată de o modificare a funcției de utilitate.

Observăm că, transformarea liniară continuă a lui  $u$  nu are nici un efect asupra alegerii decidentului și asupra echivalentelor de certitudine. Într-adevăr, luăm în considerare o funcție  $v(\cdot)$  astfel încât  $v(x) = a + bu(x)$  pentru toți  $x$ , pentru o pereche de scalare  $a$  și  $b$ , unde  $b > 0$ .

Apoi, evident,  $Ev(w + z) \geq v(w)$  generează exact aceleași restricții privind distribuția  $z$  ca, condiție (9). Aceeași analiză se poate face și pe ecuația (5) care definește echivalente de certitudine. Neutralitatea echivalentelor de certitudine cu transformările liniare ale funcției utilitare poate fi verificată în cazul riscurilor mici prin utilizarea aproximării Arrow-Pratt.

Dacă  $v = a + b_u$ , este evident că:

$$A(x) = \frac{-v''(x)}{v'(x)} = \frac{-bu''(x)}{bu'(x)} = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$$

pentru toți  $x$ . Astfel, din ecuația (6), observăm că primele de risc pentru riscurile mici nu sunt afectate de transformarea liniară. Rata medie de plată a riscului minus prima de risc - proprietatea de neutralitate este echivalentă cu certitudinea.

Limitarea analizei la riscuri mici, presupune conform acestei analize că agenții cu o aversiune absolută asupra riscului  $A(w)$  vor fi mai reticenți în a accepta riscuri mici. Plata minimă estimată care face ca riscul să fie acceptabil pentru ei va fi mai mare.

Acesta este motivul pentru care spunem că  $A$  este o măsură a gradului de aversiune față de risc a factorilor de decizie.

Din punct de vedere tehnic,  $A = -u''/u'$  este o măsură a gradului de concavitate a funcției de utilitate. Măsoară viteza cu care utilitatea marginală scade. Acum suntem interesați să extindem aceste observații la orice risc, nu numai la riscuri mici.

Considerăm următoarea definiție pentru aversiunea comparativă față de risc: presupunem că agenții  $u$  și  $v$  au aceeași avere  $w$ , care este arbitrară.

Un agent  $v$  este mai aversiv față de risc decât un alt agent  $u$  cu aceeași bogăție inițială dacă orice risc care este nedorit pentru agentul  $u$  este de asemenea nedorit și de către agentul  $v$ . Cu alte cuvinte, prima de risc a oricărui risc este mai mare pentru agentul  $v$  decât pentru agent  $u$ .

Acest lucru trebuie să fie adevărat independent de nivelul comun de avere inițial al celor doi agenți. Dacă această definiție s-ar limita la riscuri mici, știm din analiza de mai sus că acest lucru ar echivala cu cerința ca aceasta:

$$A_v(w) = \frac{-v''(w)}{v'(w)} = \frac{-u''(w)}{u'(w)} = A_u(w)$$

Dacă se limitează la riscuri mici,  $v$  este mai riscant decât  $u$  dacă funcția  $A_v$  este uniform mai mare decât  $A_u$ . Spunem în acest caz că  $v$  este mai concavă decât  $u$  în sensul lui Arrow-Pratt.

Este important de observat că aceasta este echivalentă cu condiția că  $v$  este o transformare concavă a  $u$ , adică că există o creștere și funcția concavă  $f$ , astfel încât  $v(w) = f(u(w))$  pentru toți  $w$ .

---

Într-adevăr, avem aceasta:

$$v'(w) = \langle f, ' (u(w)) u'(w) \rangle \quad \text{și}$$

$$v''(w) = \langle f, '' (u(w)) (u'(w))^2 + \langle f, ' (u(w)) u''(w) \rangle,$$

Astfel,  $Av$  este uniform mai mare decât  $Au$  dacă și numai dacă  $\langle f, \cdot \rangle$  este concav. Aceasta este echivalentă cu faptul că  $Av$  este uniform mai mare decât  $Au$  sau că  $v$  este o transformare concavă a lui  $u$ . Se observă că agentul  $v$  evaluează riscuri mai mici decât agentul  $u$ .

Trebuie să impunem mai multe restricții pentru a garanta că agentul  $v$  evaluează orice risc mai mic decât agentul  $u$ , adică,  $v$  este mai mult avers față de risc decât  $u$ . Următoarea propunere, care se datorează lui Pratt (1964), indică faptul că nu este necesară nicio restricție suplimentară.

Următoarele trei condiții sunt echivalente.

(a) Agentul  $v$  este mai avers față de risc decât agentul  $u$ , adică prima de risc pentru orice risc este mai mare pentru agentul  $v$  decât pentru agentul  $u$ ;

(b) Pentru toți  $w$ ,  $Av(w) \geq Au(w)$ ;

(c) Funcționează față de o transformare concavă a funcției  $u$ ;  $\phi' > 0$  și  $\phi'' \leq 0$  astfel încât  $v(w) = \phi(u(w))$  pentru toți  $w$ .

Am arătat deja că (b) și (c) sunt echivalente. Faptul că (a) implică (b) rezultă direct din aproximarea Arrow-Pratt. Vom demonstra că (c) implică (a). Luând în considerare orice situație  $z$ . Fie  $\Pi_u$  și  $\Pi_v$  prima de risc pentru asigurarea  $z$  zero a agentului  $u$  și respectiv a agentului  $v$ .

Prin definiție, avem:

$$v(w - \Pi_v) = Ev(w + z) = E\phi(u(w + z))$$

Definim variabila aleatoare ca fiind  $y = u(w + z)$ . Deoarece  $\phi$ , este concavă,  $E\phi(y)$  este mai mică decât  $\phi(Ey)$  de inegalitatea lui Jensen. Rezultă astfel:

$$v(w - \Pi_v) \geq \phi(Eu(w + z)) = \phi(u(w - \Pi_u)) = v(w - \Pi_u)$$

Deoarece  $v$  este în creștere, acest lucru implică faptul că  $\Pi_v$  este mai mare decât  $\Pi_u$ .

În cazul riscurilor mici, singurul lucru pe care trebuie să-l cunoaștem pentru a determina dacă un risc este de dorit este gradul de concavitate al  $u$  la nivel local la nivelul actual de avere.

Pentru riscuri mai mari, propunerea de mai sus arată că trebuie să știm mai mult pentru a lua o decizie. Anume, trebuie să cunoaștem gradul de concavitate al  $u$  la toate nivelele de avere. Gradul de concavitate trebuie să fie mărit la toate nivelurile de avere pentru a garanta că o schimbare în  $u$  face ca factorul de decizie să fie mai reticent în acceptarea riscurilor.

Dacă  $v$  este mai concav la nivel local la unele niveluri de avere și este mai puțin concav la alte nivele de avere, analiza comparativă este intrinsec ambiguă.

Pentru a ilustra propoziția, să ne întoarcem la exemplul singular de protecție a navelor lui George venind  $z = (0, \frac{1}{2}; 8000, \frac{1}{2})$ , cu o avere inițială  $w_0 = 4000$  Euro.

Dacă funcția de utilitate este  $u(w) = \sqrt{w}$ , echivalentul său de certitudine al lui  $z$  este egal cu  $eu = 3464.1$ , deoarece:

$$\frac{1}{2} \sqrt{4000} + \frac{1}{2} \sqrt{12000} = 86.395 = \sqrt{7464.1}$$

Alternativ, să presupunem că funcția de utilitate este  $v(w) = \ln(w)$ , care este de asemenea în creștere și concavă. Este ușor de verificat dacă  $v$  este mai concavă decât  $u$  în sensul lui Arrow-Pratt. Într-adevăr, aceste funcții produc:

$$A_v(w) = \frac{1}{w} \geq \frac{1}{2w} = A_u(w)$$

pentru orice  $w$ . Din propoziția de mai sus, această schimbare în utilitate ar trebui să reducă echivalentul de certitudine al oricărui risc. În cazul lui  $w_0 = 4000$  și  $z = (0, \frac{1}{2}; 8000, \frac{1}{2})$ , echivalentul de certitudine al lui  $z$  în  $v$  este egal cu  $e_v = 2928.5$ , deoarece

$$\frac{1}{2} \ln(4000) + \frac{1}{2} \ln(12000) = 8.8434 = \ln(6928.5)$$

Astfel,  $e_v$  este mai mică decât  $eu$ . Observăm că prima de risc  $\Pi_v = 1071.5$  în  $v$  este de aproximativ dublul primei de risc  $\Pi_u = 535.9$ . Acest lucru a fost prezis de către Arrow-Pratt cu aproximație, deoarece  $A_v$  este egal cu  $2A_u$ .

### Concluzii

O concluzie care se desprinde din acest articol este că aversiunea față de risc rezultă din scăderea utilității marginale, ceea ce implică faptul că ar trebui să existe o legătură între acestea.

De asemenea, investitorii care se confruntă cu risc caută să achiziționeze active riscante atunci când randamentele preconizate depășesc rata fără risc, iar cei care se confruntă cu risc nu intenționează să cumpere asigurări dacă acestea sunt prea costisitoare pentru a le achiziționa.

Cuantificarea gradului de aversiune față de risc este de un real ajutor celor care doresc să investească, ajutându-i să ia decizii mai bune în fața incertitudinii.

O altă concluzie care se desprinde din această lucrare este referitoare la riscurile mici, în cazul cărora, prima de risc crește cu mărimea riscului proporțional cu pătratul de această dimensiune.

---

#### Bibliografie

1. Anghelache C., Niță G., Badiu A. (2016), Remitențele migranților – o sursă externă de fonduri importantă și stabilă, în dezvoltarea economică a unei țări, *Revista Română de Statistică Supliment*, 12, pg. 74-82
2. Anghelache, C., Isaic-Maniu, A., Mitruț, C., Voineagu, V., Dumbravă, M., Manole, A. (2006), *Analiza macroeconomică – Teorie și studii de caz*, Editura Economică, București
3. Anghelache C., Manole, A., Anghel, M.G., & Soare, D.V. (2016) Statistical-econometric model used to analyze the operational and insolvency risks, *Theoretical and Applied Economics*, Volume XXIII, No.3 (608), pg. 221-228
4. Kahneman, D (2010), *International Difference in Well-Being*, Editura Penguin Books
5. Marcowitz, H (2010), Portfolio theory: As I still see it, *The Annual Review of Financial Economics*, 2(1), 1-23
6. Marcowitz, H (2014), Mean-variance approximations to expected utility, *European Journal of Operational Research*, 234, 346-355
7. Oancea, D., Anghelache, C., Zugravu, B. (2013) Econometric Model of Risk Forecasting. *Revista Română de Statistică – Supliment*, Vol. 2013, Trim. II, pp.123-127
8. Tobin, J. (1987), *Essays in Economics*, vol.1: *Macroeconomics*
9. Tversky, A. (2000), *Choices, Values and Frames*, Editura Cambridge University Press