
Modelul spectral – noțiuni generale

Conf. univ. dr. Mădălina-Gabriela ANGHEL (madalinagabriela_anghel@yahoo.com)

Universitatea „Artifex” din București

Drd. Gabriel-Ștefan DUMBRAVĂ (stefan.dumbrava@gmail.com)

Academia de Studii Economice din București

Oana BÂRSAN (actincon@yahoo.com)

Academia de Studii Economice din București

Abstract

Studiul autocorelațiilor unui process economic oferă informații privind dinamica unei serii de timp și sintetizează legătura dintre o variabilă și valorile istorice. În practică, staționaritatea este o caracteristică care necesită transformarea preliminară a seriei inițiale. Pentru a evita concluzii greșite privind natura economică a variației se asigură estimarea și izolarea variației de natură cronologică. O analiză economică trebuie să pornească de la înlăturarea, pe cât posibil a iregularităților determinate de valoarea extremă temporară. În acest sens sunt definite tipurile de valori, respective valorile extreme additive, valorile extreme temporare și schimbările de nivel. Descompunerea seriilor de timp se realizează prin utilizarea modelului ARIMA și a procedurii Tramo-Seats. În analizele economice trebuie identificat trendul și sezonabilitatea care sunt persistente și regulate în timp fiind asociate conceptului de non-staționaritate iar componenta tranzitorie ciclică și componenta aleatoare sunt asociate cu conceptual de staționaritate. Modelul utilizat se bazează pe elemente de natură calitativă, semnalul reprezentând componenta neobservată care se dorește a fi estimată.

Keywords: *Model spectral, serie de timp, valoare extremă, modelul ARIMA, factor calitativ, descompunere de factori, estimare.*

Classification JEL: C13, C44, C50

Introducere

În acest articol, pe baza studiului efectuat, autorii au urmărit să prezinte principalele elemente ale modelului spectral și măsura în care acesta poate fi utilizat în analiza seriilor cronologice. Pentru a modela efectele deterministe se impune mai întâi ca seria observată să fie formalizată matematic la seria staționară. Autorii explică pe larg noțiunile de valori extreme additive, valori extreme temporare și schimbări de nivel. În cadrul articolului se prezintă aspectele esențiale cu privire la descompunerea seriilor de timp prin utilizarea modelului ARIMA. Deasemenea, sunt evidențiate elementele de natură calitativă care stau la baza modelului. În cadrul studiului efectuat se abordează

aspecte concrete cu privire la descompunerea admisibilă și descompunerea canonică. În final se abordează aspecte teoretice cu privire la estimarea componentelor care vizează realizarea unei serii complete și finite a procesului economic analizat. În cadrul articolului sunt evidențiate elementele care stau la baza modelului spectral. Toate aspectele menționate sunt formalizate în relații matematice care pot fi utilizate cu succes în analizele economice. Studiul care stă la baza acestui articol poate fi extins prin aplicarea la date concrete, pe baza cărora se pot efectua analize și implementarea de decizii pertinente.

Literature review

Anghelache și Anghel (2016), precum și Newbold, Karlson și Thorne (2010) au prezentat aspecte fundamentale ale statisticii economice. Anghelache (2008) a analizat indicatorii utilizați în studiul seriilor cronologice. Anghelache și Anghelache (2009) au abordat aspecte ale folosirii seriilor cronologice în cadrul proceselor stocastice. Bardsen și colaboratorii (2005) au prezentat elemente ale modelării macroeconomice. Benjamin, Herrard, Houée-Bigot și Tavéra (2010) au studiat modalități de prognozare pe baza modelelor econometrice. Ghysels și Osborn (2001) s-au referit la analiza econometrică a seriilor de timp sezoniere. Müller (2007) a analizat estimarea variațiilor de lungă durată. Phillips, Sun și Jin (2006) au cercetat aspecte ale estimării densității spectrale și testarea ipotezei robuste.

Metodologia cercetării, date, rezultate și discuții

• Noțiuni introductive

Studiul autocorelațiilor unui proces ofera informații despre dinamica unei serii de timp și sintetizează legătura dintre x_t și valorile istorice.

Pe lângă condițiile de medie și varianță constantă, staționaritatea slabă implică și condiția nr.2 care mai poate fi scrisă:

$$\text{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \gamma_k \quad (1)$$

Din această relație rezultă că pentru o anumită distanță K autocovarianța este constantă, adică legătura dintre valori este constantă. Valorile autocovarianțelor pentru diferite distanțe k pot fi reprezentate într-o formă concentrată prin intermediul Funcției generatoare a autocovarianțelor (ACGF) care are următoarea formă:

$$\gamma(B, F) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i B^i \quad (2)$$

Funcția ACGF fiind simetrică poate fi scrisă:

$$\gamma(B, F) = \gamma_0 + \sum_{ij=1}^{\infty} \gamma_i (B^i + F^i) \quad (3)$$

Un rezultat important care se desprinde din teorema fundamentala a lui Wald este reprezentarea functiei ACGF cu ajutorul polinomului infinit $\psi(B)$

$$\gamma(B, F) = \Psi(B)\Psi(F)V_{\alpha} \quad (4)$$

Din reprezentarea fundamentala a lui Wald

$$X_t = \alpha_t + v_1\alpha_{t-1} + v_2\alpha_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} v_j\alpha_{t-j} = \Psi(B)\alpha_t \quad (5)$$

putem observa ca aceasta nu poate fi utilizata in probleme numerice, de estimare, deoarece contine un numar infinit de termeni. Prin urmare se va folosi urmatoarea aproximatie rationala:

$$\Psi(B) = \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} \quad (6)$$

Din relatiile (4) si (6) rezulta o noua forma a functiei ACGF pentru un proces ARMA:

$$\gamma(B, F) = \frac{\theta(B)\theta(F)}{\Phi(B)\Phi(F)}V_{\alpha} \quad (7)$$

B este un numar complex cu modul 1 care poate fi scris ca $e^{i\omega}$. Prin urmare, daca in relatia (3) inlocuim operatorii F si B prin reprezentarea lor complexa obtinem:

$$g(\omega) = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j (e^{-i\omega j} + e^{i\omega j}) \quad (8)$$

iar daca inlocuim in relatia (2.39) obtinem:

$$g(\omega) = \frac{\theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\bar{\omega}})}{\Phi(e^{-i\bar{\omega}})\Phi(e^{i\bar{\omega}})}V_{\alpha} \quad (9)$$

Daca utilizam identitatea

$$e^{-i\omega j} + e^{i\bar{\omega} j} = 2 \cos(j\bar{\omega}) \text{ relatia (8) devine:}$$

$$g(\omega) = \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega) \quad (10)$$

Functia $g(\omega)$ reprezinta functia generatoare a spectrului care se foloseste, in functie de situatie, intr-una din formele sale mai sus amintite.

Daca impartim relatia (10) prin 2π , obtinem puterea spectrului:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega) \right] \quad (11)$$

Trecerea de la functia generatoare a autocovariantelor la puterea spectrului se numeste transformata Fourier.

Obtinerea autocovariantelor din puterea spectrului se face prin inversa transformatei Fourier data prin relatia:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega k) f(\omega) d\omega \quad (12)$$

Daca functia generatoare a autocovariantelor este inlocuita de functia generatoare a corelatiilor, prin impartire cu varianta seriei γ_0 , se obtine **functia de densitate spectrala**.

• Preajustare a seriilor de timp

Pentru a modela efectele deterministe presupunem mai intai ca seria observata μ_t este stationara prin urmare putem scrie:

$$X_t = \mu_t + Z_t \quad (13)$$

Unde μ_t reprezinta media procesului astfel ca:

$$\mu_t = E(X_t) = Y_t' \beta \quad (14)$$

Variabila Y_t este un vector de r variabile regresive, $Y_t' = (Y_{1t}, \dots, Y_{rt})$, ponderate prin vectorul coeficientilor $\beta, \beta' = (\beta_1, \dots, \beta_r)$, Z_t urmeaza un proces general ARMA, de forma $\Phi(B)Z_t = \theta(B)a_t$, in care $\phi(B)$ si $\theta(B)$ satisfac conditiile de stationaritate si invertibilitate. Varianta procesului Y_t este data de:

$$V(X_t) = V(Z_t) \quad (15)$$

In practica stationaritate este o caracteristica care necesita de cele mai multe ori o transformare preliminara a seriei initiale. Notam cu $\delta(B)$ operatorul de diferentiere de ordinul d care realizeaza transformarea necesara in vederea obtinerii stationaritatii. Atunci

$$x_t = \delta(B)Y_t \text{ si } z_t = \delta(B)Z_t \text{ prin urmare obtinem:}$$

$$x_t = \delta(B)Y'_t\beta + z_t \quad (16)$$

Acest tip de modele sunt cunoscute ca si modele regresive liniare cu erori ARIMA sau, mai pe scurt REG-ARIMA.

In cele mai multe cazuri agentii de statistica ofera date inregistrate trimestrial sau lunar. Daca datele sunt inregistrate lunar, de exemplu, este firesc sa existe o variatie lunara care se datoreaza variatiei numarului de zile dintr-o luna si implicit a numarului de zile lucratoare din fiecare luna. Pentru a se evita concluzii gresite privind natura economica a variatiei se doreste estimarea si izolarea variatiei de natura calendaristica.

Daca exprimam seria observata in functie de numarul de zile din fiecare luna, considerand fiecare zi din cadrul saptamanii un posibil factor de influenta, putem scrie:

$$X_t = \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 Y_{2t} + \dots + \beta_7 Y_{7t} + Z_t \quad (17)$$

unde Y_t reprezinta numarul de zile, pentru fiecare zi a saptamanii, de exemplu Y_{1t} reprezinta numarul de zile de luni din luna t , Y_{2t} numarul de zile de marti s.a.m.d. iar coeficientii δ_i reprezinta cantitatea medie aferenta zilei respective.

Suma $\sum_{i=1}^7 \beta_i Y_i$ calculata pentru fiecare luna de inregistrare t , reprezinta o valoare medie calculata pornind de la presupunerea ca intr-o anumita zi a saptamanii este observata aceiasi valoare pe tot parcursul anului. Prin urmare valorile observate lunar vor fi diferite doar datorita numarului diferit de zile, fiind izolat in acest fel efectul calendaristic al numarului de zile lucratoare.

In practica coeficientii β_i sunt puternic corelati si prin urmare se recurge la o reparametrizare. Daca calculam media zilnica, $\bar{\beta} = 1/7 \sum_{i=1}^7 \beta_i$ si consideram m_t ca fiind lungimea in zile a lunii t astfel incat $m_t = \sum_{i=1}^7 Y_i$ atunci putem rescrie:

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i Y_{it} = \sum_{i=1}^7 (\beta_i - \bar{\beta}) Y_{it} + \sum_{i=1}^7 \bar{\beta} Y_{it} = \sum_{i=1}^7 b_i (Y_{it} - Y_{7t}) + \bar{\beta} m_t \quad (18)$$

Activitatea economica variaza in functie de anumite momente speciale ale anului, cum ar fi Sarbatorile de Craciun sau de Pasti, care sunt de obicei asociate cu cresteri puternice in volumul vanzarilor. In timp ce sarbatorile de Craciun au loc in fiecare an la o data fixa, efectul Pastelui poate sa se manifeste atat in luna aprilie cat si in luna Mai. Prin urmare, alegerea in fiecare an a datei

la care se sarbatoreste Pastele poate sa induca o anumita variabilitate in seria de date de la un an la celalalt.

De multe ori este utila inlaturarea si pe cat este posibil, explicarea neregularitatilor din seria de date. Acestea pot fi de mai multe tipuri: valori extrem aditive, valori extreme temporare si schimbari de nivel. Presupunand ca un model a fost identificat pentru seria x_t atunci dispunem de valorile reziduale e_t . Considerand a_t este un „zgomot alb” $I_{t_0(t)}$ este o variabila alternativa astfel incat $I_{t_0(t)} = 1$ daca $t = t_0$ i $I_{t_0}(t) = 0$ daca $t \neq t_0$ atunci putem defini urmatoarele tipuri de valori:

- **Valori extreme aditive** care sunt valori foarte mici sau foarte mari care afecteaza o singura valoare inregistrata. Aceste valori pot sa fie inregistrate datorita unor evenimente exceptionale. Daca avem, de exemplu, o serie de timp care exprima traficul lunar pe o anumita ruta in situatia in care drumul respectiv este inchis pentru reparatii timp de o luna, in seria de timp, pentru luna respectiva vom avea valoarea 0.

$$e_t = \alpha_t + \omega_A I_{t_0}(t) \quad (19)$$

- **Valori extreme temporare** care reprezinta reprezinta un soc urmat de o revenire treptata la trendul general al seriei. Astfel de valori sunt frecvent intalnite la fenomene cu ar fi grevele, de exemplu, deoarece, dupa o greva revenirea la activitatea initiala nu este spontana ci se realizeaza treptat dupa mai multe perioade de timp.

$$e_t = \alpha_t + \omega_T / (1 - \eta B) I_{t_0}(t) \quad (20)$$

- **Schimbari de nivel.** Aceste modificari in trendul general pot sa fie cauzate in general de modificari survenite in nomenclatoarele de tari sau produse.

$$e_t = \alpha_t + \omega_T / (1 - B) I_{t_0}(t) \quad (21)$$

• Descompunerea seriilor de timp prin utilizarea modelului ARIMA

Spre deosebire de abordarea structurala, care porneste de la specificarea modelelor direct pentru componentele seriei de timp, in abordarea bazata pe modele ARIMA se identifica initial un model pentru seria observata iar apoi pe baza acestuia se obtin modelele aferente fiecarei componente in parte.

Pornind de la modelul ARIMA pentru seria observata, prin descompunerea in factori a polinomului aferent partii autoregresive se obtin polinoame autoregresive pentru componentele seriei. Daca spectrul pentru toate componentele este non negativ atunci descompunerea este admisibila.

Pentru un model ARIMA identificat pentru seria observata, in general nu exista o singura descompunere. In principiu variantele de descompunere difera prin modul in care „zgomotul” este alocat componentelor. Prin alocarea, in totalitate, a zgomotului componentei aleatoare se obtine o descompunere unica care reprezinta o descompunere canonica.

In faza de descompunere efectiva a seriei observate, care se realizeaza prin procedeul SEATS, vom porni de la presupunerea ca seria de timp observata a fost initial liniarizata prin procedura TRAMO.

Abordarea descompunerii seriilor de timp bazata pe modele ARIMA porneste de la presupunerea ca un proces observat X_t este format din mai multe procese neobservate cum ar fi: componenta sezoniera S_t trendul T_t , componenta ciclica C_t si componenta aleatoare (reziduala) R_t .

Se presupune ca procesul observat este legat de componentele sale neobservate printr-o relatie aditiva de tipul relatiei (2). Daca relatie initiala nu este aditiva ea poate fi adusa la aceasta forma printr-o serie de operatii. De exemplu daca avem o serie cu legaturi de tip multiplicativ, de tipul relatiei (1), prin logaritmare ea poate fi adusa la forma aditiva.

Trendul poate fi vazut ca o relatie de echilibru de tip determinist:

$$T_t = a + bt \quad \text{unde } t \text{ reprezinta variabila timp}$$

ceea ce implica $\Delta T_t = b$.

Ecuatia de mai sus este ecuatia unei drepte cu o panta sau, din punct de vedere economic, un spor constant. Astfel de evolutii nu se intalnesc insa practic in viata economica prin urmare, intr-o abordare mai realista putem introduce o anumita perturbatie in spor. Aceasta perturbatie o presupunem de medie zero si varianta constanta obtinand astfel un trend stocastic de forma:

$$\Delta T_t = b + a_{pt} \quad \text{unde:} \quad (22)$$

$$a_{pt} \sim \text{niid}(0, \sigma_p^2)$$

ceea ce implica:

$$\Delta^2 T_t = a_{pt}$$

si, mai general, un trend stocastic poate fi descris printr-un model IMA (2,1):

$$\Delta^2 T_t = (1 + \theta_p B) a_{pt} \quad (23)$$

O clasa si mai generala de modele pentru componenta de trend este reprezentata de:

$$\Phi_p(B) \Delta^d T_t = \theta_p(B) a_{pt} \quad (24)$$

unde Φ_p si Φ_{ns} sunt polinoame de ordin relativ, iar radacinile lui Φ_p sunt toate reale, pozitive si stabile iar $d=1, 2$, in general, si foarte rar $d=3$.

In ceea ce priveste componenta sezoniera poate fi modelata, din punct de vedere determinist, in functie de o variabila alternativa. Daca avem componenta sezoniera exprimata lunar atunci putem scrie:

$$S_t = \sum_{i=1}^{12} \beta_i d_{it} \quad (25)$$

unde $d_{it} = 1$ pentru $i=t$ si $d_{it} = 0$ in rest. Parametrii β , au proprietatea ca:

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12} = 0$$

de unde decurge ca suma valorilor a 12 luni consecutive este 0:

$S_1, S_2, \dots, S_{12} = 0$ sau mai general

$$\sum_{i=0}^{11} S_{t-i} = 0 \quad (26)$$

Pentru ca in realitate acest echilibru este perturbat de un anumit soc pe care il vom considera un proces stationar moderat putem scrie:

$$\sum_{i=0}^{11} S_{t-i} = w_t \quad (27)$$

Pentru a acoperi o clasa mai larga de modele putem scrie forma mai generala:

$$\Phi_{ns}(B)S_t = \theta_{ns}(B)a_{ns} \text{ unde:}$$

$$a_{ns} \sim \text{niid}(0, \sigma_p^2) \quad (28)$$

Radacinile polinomului $\Phi_{ns}(B)$ sunt asociate cu frecventele sezoniere. Componenta aleatoare este presupusa „zgomot alb”. In situatia in care pe langa acesta mai intervine o componenta stationara tranzitorie aceasta este reprezentata printr-un model ARMA de forma:

$$\Phi_c(B)C_t = \theta_c(B)a_c \quad (29)$$

Radacinile componentei Φ_{ns} sunt asociate uneori cu perioadele fixate ale unei componente ciclice. In economie termenul de ciclu este utilizat de multe ori pentru desemna seria de timp desezonalizata si fara componenta de trend.

Ceea ce este relevant, pana in acest moment, este faptul ca trendul si sezonalitatea, care sunt persistence si regulate in timp, sunt asociate cu

conceptul de non stationaritate iar componenta tranzitorie sau ciclica si componenta aleatoare sunt asociate cu conceptul de stationaritate.

Daca generalizam si presupunem ca exista K componente in seria de timp modelul va fi reprezentat de urmatorul set de ecuatii:

$$x_t = x_{1t} + x_{2t} + \dots + x_{kt}$$

$$\Phi_i(B)x_{it} = \theta_i(B)a_{it} \quad i=1, \dots, k \quad (30)$$

unde $\Phi_i(B)$ si $\theta_i(B)$ sunt polinoame finite in B de ordine p_i si respectiv q_i , nu au radacini comune si toate radacinile sunt pe sau in afara cercului unitate iar

$$a_{it} \sim \text{niid}(0, \sigma_i^2) \quad \text{este un „zgomot alb”}.$$

Din moment ce prin agregarea modelelor ARIMA se obtin tot modele ARIMA seria de timp observata x_t , va fi exprimata tot printr-un model ARIMA:

$$\Phi(B)x_t = \theta(B)a_t \quad (31)$$

unde

$$a_t \sim \text{niid}(0, \sigma_a^2) \quad \text{este un „zgomot alb”}.$$

Pornind de la relatiile anterioare se poate arata ca polinomul componentei autoregresive a modelului (32) pentru seria observata x_t , satisface relatia:

$$\Phi(B) = \Phi_1(B)\Phi_2(B) \dots \Phi_k(B) \quad (32)$$

iar polinomul mediei mobile poate fi obtinut din relatia

$$\theta(B)a_t = \sum_{i=1}^k \Phi_{it}(B)\theta_i(B)a_{it} \quad (33)$$

Unde $\Phi_{ni}(B)$ este produsul tuturor polinoamelor $\Phi_j(B)$, $j=1, \dots, k$ excluzand polinomul $\Phi_i(B)$.

• Elemente de natura calitativa care stau la baza modelului

Pentru ca nu intotdeauna toate componentele neobservate prezinta interes vom considera in continuare o relatie cu un grad mai ridicat de agregare si cu un caracter mai practic formata din semnal si non-semnal. Semnalul reprezinta componenta neobservata care se doreste a fi estimata iar non semnalul reprezinta partea ramasa din serie.

$$x_t = s_t + n_t \quad (34)$$

unde: s_t - semnalul

n_t - non semnalul

Intr-o problema de ajustare sezoniera, adica in cazul in care se doreste inlaturarea componentei sezoniere, semnalul va fi reprezentat de partea non sezoniera adica semnalul va fi

$$s_t = T_t + C_t + R_t \quad (35)$$

In continuare, trebuie amintite premisele de la care au pornit autorii Box, Hillmer si Tiao (1978), Burman (1980), si Hillmer si Tiao (1982) care au pus bazele metodei de descompunere pe baza unor modele ARIMA.

Premisa nr. 1

Componentele neobservate nu sunt corelate. Este o presupunere care are o explicatie bazata pe faptul ca este intuitiv normal ca componente diferite ale seriei observate sa fie generate de forte diferite. Fluctuatiile sezoniere, de exemplu, sunt cauzate de evenimente sezoniere cum ar fi anotimpuri, sarbatori, concedii etc. in timp ce evolutia trendului este cauzata de factori cum ar fi progresul tehnologic, cresterea productivitatii etc.

Premisa nr. 2

Componentele neobservate pot fi descrise de modele ARIMA de forma:

$$\Phi_s(B)s_t = \theta_s(B)a_{st} \text{ pentru semnal} \quad (36)$$

$$\Phi_n(B)n_t = \theta_n(B)a_{nt} \text{ pentru non semnal} \quad (37)$$

unde a_{st} si a_{nt} reprezinta „zgomot alb” cu varianta v_s respectiv v_n
Modelele sunt considerate ireductibile.

Premisa nr. 3

Polinoamele componentei auto regresive (AR), $\Phi_s(B)$ si $\Phi_n(B)$ nu au radacini comune, ceea ce implica faptul ca spectrul pentru componentele neobservate nu ia valori ridicate la aceeasi frecventa.

Premisa nr. 4

Modelul pentru seria observata este cunoscut, adica polinoamele $\Phi_x(B)$, $\theta_x(B)$ si varianta inovatiei, v_a , sunt cunoscute.

Din presupunerile prezentate anterior rezulta ca modelul seriei observate, x_t este un model ARIMA de forma:

$$\Phi_x(B)x_t = \theta_x(B)a_t \quad (38)$$

unde,

$$\Phi_x(B) = \Phi_n(B)\Phi_s(B)$$

$$\theta_x(B)a_t = \Phi_s(B)\theta_n(B)a_{nt} + \Phi_n(B)\theta_s(B)a_{st} \quad (39)$$

iar a_t este un „zgomot alb”, normal distribuit cu varianța v_a .

• Descompunere admisibilă

Datorită faptului că polinoamele autoregresive ale componentelor, semnal și non semnal, se determină prin factorizarea polinomului $\Phi_x(B)$ necunoscutele modelului pentru componente sunt coeficienții polinoamelor $\Phi_s(B)$ și $\Phi_n(B)$ și varianțele inovațiilor v_s și v_n . În modelul (38) informația despre structura stocastică a componentelor este furnizată de seria de date observată și de relația generală (39). Această relație implică un sistem cu

$$\max(p_s + q_n, p_n + q_s) + 1 \quad (40)$$

ecuații de covarianță în timp ce numărul de necunoscute este $q_n + q_s + 2$. În situație în care :

$$\max(p_s + q_n, p_n + q_s) + 1 < q_n + q_s + 2 \quad (41)$$

în absența unor condiții suplimentare există un număr infinit de soluții pentru de sistemul ecuațiilor de covarianță și deci există un număr infinit de variante pentru descompunerea seriei x_t . Orice descompunere care verifică relațiile modelului general iar spectrul componentelor nu este negativ reprezintă o descompunere admisibilă. Toate descompunerile admisibile sunt echivalente din punctul de vedere al seriei observate.

Datorită faptului că există mai multe structuri posibile, care generează aceeași serie observată componentele serie de timp sunt, în general, neidentificabile. De exemplu dacă dorim să extragem componenta sezonieră dintr-o serie de timp pornim de la ipoteza că sezonalitatea este reprezentată de fluctuații cu o periodicitate de un an de zile care corespund unor amplitudini spectrale localizate la frecvențele sezoniere. Această definiție nu este destul de restrictivă. Valori mari ale amplitudinii spectrale sunt generate de valori mari ale polinomului autoregresiv dar datorită faptului că nu este impusă nici o condiție pentru media mobilă și pentru varianța inovației, sunt permise o multitudine de posibilități pentru modelul respectiv.

Concluzia este că, pentru a putea fi identificate componentele seriei de timp sunt necesare anumite presupuneri arbitrare în plus față de cele patru premise prezentate în paragraful anterior. Unul dintre avantajele descompunerii pe baza modelelor ARIMA este acela că presupunerile pot fi

facute in mod explicit in timp ce, in cazul metodelor empirice, aceste ipotezele nu sunt cunoscute.

• **Descompunerea canonica**

Descompunerea canonica a fost pentru prima data propusa de Box, Hillmer si Tiao (1978) si apoi de Pierce (1978). Descompunerea canonica trateaza problema identificarii modelului ca pe o problema de repartizare a zgomotului. Modul de repartizare a acestuia este o decizie luata apriori si prin urmare este pusa in mod explicit inca o conditie.

Descompunerea canonica consta in specificarea componentei care se doreste a fi estimata, adica a semnalului, astfel incat aceasta sa fie, pe cat posibil, eliberata de zgomot. Zgomotul este in principal repartizat componentei aleatoare. Semnalul eliberat de zgomot se numeste semnal canonic si prezinta o valoare nula in spectrul sau, ceea ce corespunde unei radacini unitate in polinomul mediei mobile. Prin urmare, semnalul canonic este non invertibil.

Ipoteza de independenta a componentelor implica urmatoarea relatie:

$$g_x(\omega) = g_s(\omega) + g_n(\omega) \quad (42)$$

Daca notam:

$$\varepsilon_s = \min_{\omega} g_s(\omega) \quad \text{si}$$

$$\varepsilon_n = \min_{\omega} g_n(\omega)$$

atunci cantitatea $\varepsilon_s + \varepsilon_n$ poate fi vazuta ca si varianta zgomotului inclusa in spectrul seriei observate si care poate fi atribuita in mod arbitrar. Devine clar faptul ca problema identificarii modelului se datoreaza faptului ca o fractie din ε_n si ε_s , poate fi extrasa din spectrul oricarei componente si atribuit celeilalte componente. Daca eliminam zgomotul atat cat este permis din semnalul s_t si il atribuim non semnalului n_t , atunci obtinem $g_n^0(\omega) = g_s(\omega) + \varepsilon_s$ spectrul semnalului canonic, non invertibil si $g_n^0(\omega) = g_n(\omega) + \varepsilon_s$ spectrul non semnalului in care se concentreaza tot zgomotul.

O proprietate importanta a descompunerii canonice este aceea ca modelele admisibile pentru semnal pot intotdeauna reprezentate ca si suma dintre semnalul canonic si plus un „zgomot alb” ortogonal. Mai mult decat atat Hillmer si Tiao (1982) au aratat ca descompunerea canonica minimizeaza varianta inovatiei semnalului iar varianta inovatiei componentei aleatoare este maximizata cand celelalte componente sunt considerate canonice.

• **Estimarea componentelor**

Obiectivul final în procesul de descompunere a unui serii de timp este estimarea semnalului S_t , adică a componentei care se dorește a fi estimată în structura seriei de timp.

Dacă pornim de la o anumită realizare X_t a procesului observat și dacă vom nota cu $\hat{S}_t$, estimatorul semnalului, pentru a determina un estimator optim, vom pune condiția ca diferența de la semnal la estimatorul său să fie minimă, adică eroarea de estimare să fie minimă. Ceea ce înseamnă că vom determina $\hat{S}_t$ astfel încât :

$$E[(S_t - \hat{S}_t)^2 | X_t]$$

să fie minimă. În condițiile de distribuție normală estimatorul $\hat{S}_t$ este egal cu valoarea așteptată condiționată $E(S_t | X_t)$ adică este o funcție liniară de elementele X_t .

Procedura efectivă de descompunere constă în determinarea estimatorului $\hat{S}_t$, în contextul presupunerilor asupra structurii modelului făcute în paragrafele anterioare.

a. Pentru o realizare completă a procesului $X_t = \{x_{-\infty} \dots x_t \dots x_{+\infty}\}$

Estimatorul $\hat{S}_t$ se determină, după cum a arătat Whittle (1963), prin următorul filtru simetric cunoscut sub denumirea de filtrul Wiener-Kolmogorov (WK):

$$V(B,F) = \frac{ACGF(S_t)}{ACGF(X_t)} = \frac{V_s \frac{\theta_s(B)\theta_s(F)}{\phi_s(B)\phi_s(F)}}{V_a \frac{\theta(B)\theta(F)}{\phi(B)\phi(F)}} \quad (43)$$

Estimatorul $\hat{S}_t$ se determină după relația:

$$\hat{S}_t = V(B,F)X_t \quad (44)$$

unde filtrul $V(B,F)$ este raportul dintre funcțiile generatoare a autocovarianței pentru semnal și pentru seria observată.

Se poate remarca o caracteristică importantă a filtrului WK și anume faptul că pentru determinarea valorilor estimate ale semnalului este necesară doar specificarea modelului pentru semnal și pentru seria observată.

Din relațiile (43) și (44) obținem:

$$\hat{S}_t = k_s \frac{\theta_s(B)\phi_n(B)}{\theta(B)} \frac{\theta_s(F)\phi_n(F)}{\theta(F)} \quad (45)$$

unde $k_s = V_s/V_a$. Din relația anterioară observăm că filtrul este funcția generatoare a autocovarianței, ACGF, pentru următorul model staționar:

$$\theta(B)z_t = \theta_s(B)\phi_n(B)b_t \quad (46)$$

unde b_t este „zgomot alb” cu varianta V_s / V_a . Prin urmare deducem ca filtrul este convergent, centrat și simetric.

Dacă trecem în spațiul frecvențelor putem avea o reprezentare a filtrului de această formă:

$$\hat{V}(B, F) = g_s(\omega) / g_s(\omega) \quad (47)$$

care este cunoscută sub denumirea de beneficiul filtrului.

Spectrul estimatorului semnalului $\hat{S}_t$, va avea forma:

$$g_{\hat{S}}(\omega) = \left[\frac{g_s(\omega)}{g_x(\omega)} \right]^2 g_x(\omega) = [\hat{V}(B, F)]^2 g_x(\omega) \quad (48)$$

Patratul beneficiului filtrului arată modul în care varianta seriei contribuie la varianta semnalului. Atunci când pentru o anumită frecvență semnalul domină zgomotul $V(B, F)$ se apropie de 1 iar atunci când zgomotul domină semnalul, $\hat{V}(B, F)$ se apropie de 1.

b. Pentru o realizare finită a procesului $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$

Ipoteza unei realizări infinite a seriei a fost necesară pentru ca filtrul WK din relația (43) parcurge dreapta reală de la $-\infty$ la $+\infty$. În condiții practice însă realizarea observată este finită. Pentru ca filtrul este convergent poate fi întrerupt fără probleme într-un anumit punct. Pentru perioadele foarte apropiate de ambele capete ale seriei este imposibil să aplicăm filtru WK care este simetric. La începutul și la finalul seriei observate calcularea estimatorului presupune cunoașterea unor valori pentru perioada trecută respectiv viitoare care nu sunt cunoscute în momentul efectuării descompunerii. Este prin urmare necesar ca seria de timp să fie extinsă cu valori estimate și valori previzionate.

Algoritmul Burman-Wilson (Burman, 1980) permite ca filtrarea să poată fi realizată în mod eficient cu un număr minim de valori estimate și previzionate.

Erorile de estimare pot fi descompuse în două tipuri de erori: eroarea finală de estimare și eroarea revizuită.

Eroarea finală de estimare calculată ca $S_t - \hat{S}_t$ este obținută în ipoteza unei realizări complete a seriei. În practică însă, atunci când numărul de realizări este suficient de mare, eroarea medie de estimare se referă la valorile aflate în centrul seriei.

Eroarea revizuită este legată de imposibilitatea de a obține realizări infinite și se referă la estimatorul calculat în apropierea extremităților seriei de timp. Independența celor două tipuri de erori a fost demonstrată de Pierce (1980).

Concluzii

Din studiul efectuat de autori și prezentat în acest articol se desprinde concluzia că modelul spectral poate fi utilizat cu succes în analiza seriilor cronologice. Relațiile matematice considerate constituie o posibilitate practică de analiză a datelor empirice în vederea determinării parametrilor și trendului fenomenului analizat. Rezultă că descompunerea seriilor de timp se poate realiza prin utilizarea modelului ARIMA, care se bazează pe elemente de natură calitativă. Putem avea în vedere descompunerea admisibilă sau canonică. Descompunerea canonică constă în specificarea componentelor (factorului) care se dorește a fi exprimat așa încât aceasta să fie cât mai aproape de realitate. Obiectivul final în procesul de descompunere a unei serii de timp este estimarea semnalului, adică a componentei ce trebuie estimată. Estimarea componentelor urmărește realizarea completă a procesului analizat, precum și realizarea finită a acestui proces. Utilizarea algoritmului Burman-Wilson permite ca filtrarea să se poată realiza în mod eficient și în cazul unui număr redus de valori estimate și previzionate.

Bibliografie

1. Anghelache, C., Anghel, M.G. (2016). *Bazele statisticii economice. Concepte teoretice și studii de caz*, Editura Economică, București
2. Anghelache, C., Anghelache, G.V. (2009). Utilization Of The Chronological Series Within The Stochastic Processes. *Metalurgia Internațional*, XIV (4) Special Issue, Editura Științifică F.M.R., 154-156
3. Anghelache, C. (2008). *Tratat de statistică teoretică și economică*, Editura Economică, București
4. Bardsen, G. și colaboratorii (2005). *The Econometrics of Macroeconomic Modelling*, Oxford University Press
5. Benjamin, C., Herrard, N., Houée-Bigot, M., Tavéra, C. (2010). *Forecasting with an Econometric Model*, Springer
6. Ghysels, E., Osborn, D. (2001). *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge University Press, United Kingdom
7. Müller, U.K. (2007). A Theory of Robust Long-Run Variance Estimation. *Journal of Econometrics*, 141, 1331-1352
8. Newbold, P., Karlson, L.W., Thorne, B. (2010). *Statistics for Business and Economics*, 7th ed., Pearson Global Edition, Columbia, U.S
9. Phillips, P.C.B., Sun, Y., Jin, S. (2006). Spectral Density Estimation and Robust Hypothesis Testing using Steep Origin Kernels without Truncation. *International Economic Review*, 47, 837-894.