
Noțiuni teoretice generale privind regresia univariată

Prof. univ. dr. Constantin ANGHELACHE

Academia de Studii Economice din București/Universitatea „Artifex”, din București

Prof. univ. dr. Ion PARTACHI

Academia de Studii Economice a Moldovei, Chisinau

Conf. univ. dr. Mădălina-Gabriela ANGHEL

Universitatea „Artifex”, din București

Drd. Gyorgy BODO

Drd. Radu STOIAN

Academia de Studii Economice din București

Abstract

În acest articol, autorii au pornit de la faptul că, în general, noțiunile de probabilitate condițională și probabilitate condițională liniară, în termeni de proiecție ortogonală, sunt comune mulțimii funcțiilor liniare. Pe acest fond, s-a efectuat o prezentare a principalelor condiționări pe care le presupune regresia univariată. Astfel, sunt prezentate și demonstrate condițiile de liniaritate, necoliniaritate și cea a normalității condiționale. Totodată, se evidențiază condiționarea de homoscedasticitate. În continuare, în prezentarea condiționărilor de liniaritate și homoscedasticitate, se pleacă de la evidențierea conceptului de eroare care trebuie considerată în cazul regresiei univariată. În continuare, se subliniază că estimarea se efectuează prin metoda celor mai mici pătrate care se reduce la estimarea parametrului beta. Un alt element avut în vedere și clarificat se referă la înlocuirea probabilității prin distribuția probabilității de eșantionare, care se supune criteriului de minimizare.

În final, se evidențiază faptul că estimatorul celor mai mici pătrate ordinare $\hat{\beta}$, al lui β are o variație minimă în familia tuturor estimatorilor liniari imparțiali ai lui β .

Cuvinte cheie: probabilitate condițională, funcție integrabilă, variabilă exogenă, regresie univariată, proiecție ortogonală

Introducere

În general, sunt comune noțiunile de probabilitate condițională și probabilitatea condițională liniară – sau regresie liniară – în termeni de proiecții ortogonale în sensul normei L^2 , pe mulțimea funcțiilor integrabile ale unui vector oarecare z , indicat de $L^2(z)$, și pe mulțimea funcțiilor liniare ale lui z , indicată de $L^2(z)$. Vom aplica conceptul de regresie și regresie liniară modelelor specifice, pentru a studia probleme de estimare și testare.

Vom aminti câteva noțiuni generale ale regresiei lineare. Să considerăm un model statistic $M_n = \{X^n, \Theta, P_n^\theta\}$ unde $X^n \subset \mathfrak{R}^m$ este domeniul eșantion de dimensiunea n , Θ este domeniul parametru, și P_n^θ este familia distribuțiilor de eșantionare. Fie $x \in X^n$ un șir finit $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ cu $x_i = (y_i, z_i)$ unde $y_i \in \mathfrak{R}, z_i \in \mathfrak{R}^q, q = m - 1$. Considerăm doar cazul în care dimensiunea p a lui

y_i , este egală cu unu. Observațiile $x_1, \dots, x_n$ sunt independente în sensul distribuției P^θ pentru toate θ și distribuite în funcție de aceeași distribuție a probabilității $Q^\theta : P_n^\theta = [Q^\theta]^{\otimes n}$. Mai mult chiar, presupunem că pentru toate $1, \dots, n, y_i$ și z_j pentru $j=1, \dots, q$ sunt variabile aleatorii pătratice integrabile, de ex. aparțin lui $L^2(z)$.

Prezentarea modelului regresiei în termeni de probabilități, este, în cazul liniar, identic cu cel al lui Spanos (1986), care îl denumește model de regresie liniară în contrast cu modelul liniar al lui Gauss, definit de ecuația obișnuită $y = X\beta + u$. Pentru cel din urmă, variabilele exogene par hotărâtoare. Într-adevăr, modelul regresiei liniare este bazat pe argumente generale probabilistice și modelul liniar gaussian este doar un caz particular. În această prezentare, mai degrabă generală a modelului regresiei, putem adânci studiul în lucrările aceluiași autor.

Literature review

În ceea ce privește modelul regresiei liniare, o dovadă mai riguroasă a echivalenței OLS și metoda momentelor pot fi găsite în Gouriéroux și Monfort (1996a). Modelul restricționat de regresie a fost studiat de numeroși autori, în special Gouriéroux și Monfort (1996a, Volumul 2), Greene (1990), Spanos (1986), Judge, Griffiths, Hill, Lutkepohl, și Lee (1985), și Judge, Hill, Griffiths, Lutkepohl, și Lee (1988). Pentru a arăta că $\hat{\beta}_n^*$ este BLUE, pot fi consultați în special Judge, Hill, Griffiths, Lutkepohl, și Lee (1988). Pentru o estimare, puteți consulta Spanos (1986), Greene (1990), și Judge Hill, Griffiths, Lutkepohl, și Lee (1988). Principalele aspecte pentru modelul logaritm liniar se regăsesc în lucrarea lui Greene (1990). Pentru a demonstra convergența lui $\hat{\sigma}_n^2$ la σ^2 , se poate consulta Monfort (1982). În analiza unei comparații a procedurilor de test în Wald, Rao, și LR pentru cazul în care ipoteza nulă poate fi exprimată în forma $R\beta = r$, se poate adânci studiul autorilor Judge, Griffiths, Hill, Lutkepohl, și Lee (1985) și Spanos (1986).

În cazul regresiei parametrice neliniare, indicăm spre studiu suplimentar Bierens (1994), Gouriéroux și Monfort (1996a, Volumul I), Greene (1990, Capitolul 11), Spanos (1986); iar pentru testul restricțiilor liniare - Bierens (1994).

Partea privitoare la modele specificate eronat poate fi adâncită prin studiul lucrărilor lui White (1980), Florens, Ivaldi și Larribeau (1996), Gallant și White (1988), și White (1994).

Metodologie și date

Suntem interesați de probabilitatea condițională de forma

$$E^\theta(y_i | z_i) = g(z_i, \beta),$$

Pentru toate i , unde β este o funcție a θ care presupunem că este finită. Considerăm problema estimării acestui vector de parametru β , presupunând că g este cunoscut. Definind vectorul aleatoriu u în domeniul $\mathfrak{R}^p$ și $u = (u_1, \dots, u_n)$ pentru toate i , obținem:

$$u_i = y_i - E^\theta(y_i | z_i). \quad (1)$$

Proprietățile care vor duce la următorul model:

$$g(z_i, \beta) = EL^\theta(y_i|z_i) = \beta' z_i. \quad (2)$$

Alegerea lui g , sau mai general alegerea domeniului de condiționare sau proiectare determină tipul de model luat în considerare. În acest mod, dacă domeniul este restricționat la mulțimea $L^{*2}(z)$. În domeniul funcțiilor liniare ale lui z , obținem:

$$g(z_i, \beta) = EL^\theta(y_i|z_i) = \beta' z_i.$$

Regresia liniară

În primul rând, luăm în considerare presupunerile care ne permit să specificăm ceea ce denumim model de regresie liniară. Să ne amintim că $y_i \in \mathfrak{R}$ și $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{iq})$ pentru toate $i=1, \dots, n$ cu proprietatea că $z_i = 1$, la care vom reveni ulterior.

Mai întâi vom presupune condiția de liniaritate

• Pentru toate $i=1, \dots, n$, avem:

$$EL^\theta(y_i|z_i) = EL^\theta(y_i|z_i) = \beta' z_i = \sum_{j=1}^q \beta_j z_{ij}, \text{ cu}$$

$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q)$, în plus $E^\theta(z_i z_i')$ este inversabil.

Putem să deducem din această presupunere forma generală a ecuației regresiei liniare, folosind expresia pentru termenul oarecare u_i rezultând din relația (1), astfel:

$$y_i = \beta' z_i + u_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Definim vectorii $n \times 1$ - y și u de către $y = (y_1, \dots, y_n)$ și $u = (u_1, \dots, u_n)$ și matricea Z $n \times q$ prin funcția:

$$Z = (z_{ij})_{i,j} = (z_1, \dots, z_n)'$$

Forma de matrice a ecuației regresiei este $y = Z\beta + u$.

Prin construcție, termenul u_i posedă o serie de proprietăți. Pentru toate $i=1, \dots, n$, obținem:

$$E^\theta(u_i|z_i) = 0$$

Precizăm că independența x_i , implică faptul că $E^\theta(u_i | z_i) = E^\theta(u_i | Z)$ și astfel

$$E^\theta(u|Z) = 0.$$

Apoi, vom deduce:

$$E^\theta(u_i z_i | z_i) = z_i E^\theta(u_i | z_i) = 0. \quad (3)$$

Această a doua proprietate reprezintă ortogonalitatea condițională între u_i și z_i . De asemenea, aceste proprietăți rămân valabile în termeni de probabilități marginale, adică:

$$E^\theta(u_i) = E^\theta[E^\theta(u_i|z_i)] = 0$$

și

$$E^\theta(u_i z_i) = 0$$

pentru $i=1, \dots, n$, care constituie ecuația fundamentală a estimării.

• Următoarea condiționare de identificate este presupunerea de ne-coliniaritate, adică:

$$\text{Rank}(Z) = q \quad (n > q).$$

Aceasta poate fi scrisă în următoarele moduri echivalente $\text{Rank}(Z'Z) = q, \det(Z'Z) \neq 0$ sau $Z'Z$ inversabil. Aceasta este presupunerea echivalentă în termeni de eșantion al presupunerii distribuționale că matricea variație $E^\theta(z_i z_i')$ este inversabilă, ceea ce nu depinde de i .

O altă condiționare este cea de homoscedasticitate, respectiv:

$$\text{Var}^\theta(y_i | z_i) = \sigma^2, \text{ for all } i = 1, \dots, n.$$

Putem să inferăm imediat că $\text{Var}^\theta(y_i | z_i) = \sigma^2$, pentru toate $i = 1, \dots, n$. Mai mult, pentru toate i și j cu $i \neq j$, obținem:

$$\begin{aligned} \text{Cov}^\theta(u_i, u_j | Z) &= E^\theta(u_i u_j | Z) \\ &= E^\theta[(y_i - E^\theta(y_i | z_i))(y_j - E^\theta(y_j | z_j)) | Z] \\ &= E^\theta[(y_i - E^\theta(y_i | Z))(y_j - E^\theta(y_j | Z)) | Z] \\ &= E^\theta(y_i y_j | Z) - E^\theta[y_i E^\theta(y_j | Z) | Z] - E^\theta[y_j E^\theta(y_i | Z) | Z] \\ &\quad + E^\theta[E^\theta(y_i | Z) E^\theta(y_j | Z) | Z] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De vreme ce y_i și y_j sunt independente condițional pe Z , deducem:

$$E^\theta(u_i u_j | Z) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Această proprietate a termenului erorii poate fi scrisă și sub forma relațiilor:

$$E^\theta(u_i u_j) = E^\theta[E^\theta(u_i u_j | Z)] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{Dacă } i = j \\ 0 & \text{Dacă } i \neq j \end{cases}$$

Sau

$$\text{Var}^\theta(u) = E^\theta(uu') = \text{Var}^\theta(u | Z) = E^\theta(uu' | Z) = \sigma^2 I_n$$

Ultima condiționare este cea a normalității condiționale, când $y_i | z_i$ este distribuită normal pentru toate $i = 1, \dots, n$.

Condiționările 1, 3, și 4 pot fi rezumate prin:

$$y_i | z_i \sim i.i.N(\beta' z_i, \sigma^2).$$

Pentru toate $i = 1, \dots, n$, ceea ce implică faptul că $u_i | z_i \sim i.i.N(0, \sigma^2)$ mai precis

$$u_i \sim i.i.N(0, \sigma^2).$$

Această ultimă proprietate (condiționare) rezumă principiile de bază ale modelelor de regresie liniară într-un număr mare de manuale de econometrie care specifică modelul în acest mod, începând cu termenul eroare și derivând din el tocmai presupunerile de ortogonalitate, liniaritate și homoscedasticitate. În cazul de față, condiționările sunt specificate.

Estimarea prin cele mai mici pătrate ordinare se reduce la estimarea vectorului

parametru β . Vom folosi aici rezultatele Capitolului anterior despre noțiunea de cea mai bună aproximare în sensul normei L^2 . Estimatorul pe care îl obținem prin această metodă este estimatorul *Celor mai mici pătrate ordinare (OLS)* al lui β .

Estimatorul lui β este obținut ca soluție a problemei minimizării următoarei funcții față de λ , adică:

$$E^\theta \left[\left(y_i - \sum_{j=1}^q \lambda_j z_{ij} \right)^2 \right] = E^\theta \left[(y_i - \lambda' z_i)^2 \right],$$

De aici obținem următorul sistem simplu de ecuații, respectiv

$$E^\theta [z_i(y_i - \lambda' z_i)] = 0. \quad (5)$$

Ecuația (4) îl definește pe β ca soluție la o problemă de minimizare, de forma:

$$\phi(x_i, \lambda) = (y_i - \lambda' z_i)^2.$$

Primele condiții de ordine (5) formează o ecuație simplă a momentului fixând

$$\psi(x_i, \lambda) = z_i(y_i - \lambda' z_i).$$

Înlocuirea probabilității în ceea ce privește distribuția probabilității de eșantionare cu cea calculată folosind distribuția empirică, o transformă în minimizarea:

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^q \lambda_j z_{ij} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda' z_i)^2 \quad (6)$$

față de $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, sau în termeni de matrice la minimizarea:

$$D(\lambda) = (y - Z\lambda)'(y - Z\lambda).$$

față de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$.

Primele condiții ale ordinii problemei minimizării sunt:

$$\frac{\partial D(\lambda)}{\partial \lambda} = -2Z'y + 2Z'Z\lambda = 0. \quad (7)$$

Aceasta poate fi rescrisă ca:

$$Z'(y - Z\lambda) = 0$$

sau

$$\sum_{i=1}^n z_i(y_i - \lambda' z_i) = 0,$$

Această ultimă relație ne permite să obținem expresia pentru estimatorul momentului β_n , denumit aici și estimatorul celor mai mici pătrate ordinare ale β , adică:

$$\hat{\beta}_n = (Z'Z)^{-1} Z'y = \left[\sum_{i=1}^n z_i z_i' \right]^{-1} \sum_{i=1}^n z_i y_i. \quad (8)$$

Urmând logica notației, acest estimator ar trebui să fie notat cu $\hat{\lambda}_n$. Vom folosi notația $\hat{\beta}_n$ pentru a ne rămâne în sistemul de demonstrație asumat.

A doua condiție de ordine este satisfăcută pentru:

$$\frac{\partial^2 D(\lambda)}{\partial \lambda \partial \lambda'} = Z'Z$$

care este o matrice pozitivă semi-definită, astfel $\hat{\beta}_n$, este un minim. Considerând, pentru toate $i = 1, \dots, n$,

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_n' z_i$$

și

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

putem să definim vectorii $\hat{y}$ și $\hat{u}$, ambii de dimensiunea $n \times 1$, prin:

$$\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)' \text{ și } \hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)'$$

Sub condițiile 1-3, când σ^2 este necunoscut, pot fi estimate prin:

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_n' z_i)^2$$

și

$$\sigma^2 = E^{\theta}(u_i^2) = E^{\theta}[(y_i - \beta' z_i)^2] \quad (9)$$

Totuși, vom prefera un estimator diferit, care rămâne imparțial, adică:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-q} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_n' z_i)^2, \quad (10)$$

$\hat{\sigma}_n^2$ poate fi scris și sub forma:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-q} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \frac{1}{n-q} (y - \hat{y})'(y - \hat{y}) = \frac{1}{n-q} \hat{u}'\hat{u}.$$

unde $\hat{\sigma}_n^2$ este egal cu:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-q} (y - Z\hat{\beta}_n)'(y - Z\hat{\beta}_n) \\ &= \frac{1}{n-q} (y'y - y'Z(Z'Z)^{-1}Z'y) \\ &= \frac{1}{n-q} y'M_Z y \end{aligned}$$

iar

$$M_Z = 1 - Z(Z'Z)^{-1}Z'$$

Vom considera că densitatea condițională a lui Y_i este de forma:

$$f(y_i|z_i, \beta, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y_i - \beta' z_i)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Problema de maximizare în acest caz este:

$$\max_{\lambda, \rho} E^{\theta} [\ln f(y_i | z_i, \lambda, \rho)].$$

MLE a lui β și σ^2 , pe care o exprimăm prin $\tilde{\beta}_n$, și $\tilde{\sigma}_n^2$ satisface egalitatea:

$$\begin{aligned} (\tilde{\beta}_n, \tilde{\sigma}_n^2) &= \arg \max_{\lambda, \rho} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f(y_i | z_i, \lambda, \rho) = \\ &= \arg \max \ln l_n(y | Z, \lambda, \rho), \end{aligned}$$

unde l_n este exprimarea probabilității dată de

$$l_n(y | Z, \lambda, \rho) = \prod_{i=1}^n f(y_i | z_i, \lambda, \rho) = \frac{1}{\rho^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \lambda' z_i)^2}{2\rho^2} \right\}$$

Estimatorii sunt apoi derivați, adică

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln l_n(y | Z, \lambda, \rho) = 0$$

și

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \ln l_n(y | Z, \lambda, \rho) = 0$$

Această este echivalentă cu

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda' z_i)^2 = \frac{\partial}{\partial \lambda} (y - Z\lambda)'(y - Z\lambda) = 0 \quad (11)$$

și

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda' z_i)^2 \quad (12)$$

în condițiile relației (11). Din relația (12) putem deriva expresia pentru $\tilde{\sigma}_n^2$ și vom obține:

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{\beta}_n' z_i)^2 = \frac{n}{n-q} \tilde{\sigma}_n^2. \quad (13)$$

Proprietățile eșantioanelor mici vor fi evidențiate pornind de la eșantionul finit al lui $\hat{\beta}_n$. $\hat{\beta}_n$ poate fi scris în forma Ay , cu $A = (Z'Z)^{-1}Z'$, și astfel este liniar în y . Mai mult,

$$\hat{\beta}_n = (Z'Z)^{-1}Z'(Z\beta + u) = \beta + (Z'Z)^{-1}Z'u,$$

Așa încât,

$E^{\theta}(\hat{\beta}_n | Z) = \beta$; așadar $\hat{\beta}_n$ este un estimator imparțial al lui β . Variația condițională este dată de relația:

$$\text{Var}^{\theta}(\hat{\beta}_n | Z) = E^{\theta}((Z'Z)^{-1}Z'u | Z) = \sigma^2(Z'Z)^{-1}.$$

Astfel, se ajunge teorema Gauss-Markov, care prevede:

„Estimatorul celor mai mici pătrate ordinare $\hat{\beta}_n$ al lui β are o variație minimă în familia tuturor estimatorilor liniari imparțiali ai lui β ”.

Pentru a demonstra aceasta, vom considera un estimator liniar diferit al lui β , notat cu $\tilde{\beta}_n$, de forma $\tilde{\beta}_n = Cy$, unde C este o matrice $q \times n$, de forma:

$$C = D + (Z'Z)^{-1}Z'$$

În ecuația de mai sus, D are dimensiunea $q \times n$. Să presupunem că acest nou estimator este imparțial, ceea ce presupune:

$$E^u(\tilde{\beta}_n|Z) = E^u[(D + (Z'Z)^{-1}Z')(Z\beta + u)|Z] = DZ\beta + \beta$$

Aceasta înseamnă că $DZ = 0$ și în consecință:

$$\tilde{\beta}_n = \beta + (D + (Z'Z)^{-1}Z')u.$$

Calculând variația lui $\tilde{\beta}_n$, utilizând constrângerea $DZ = 0$ și faptul că $Var^{\theta}(u|Z) = \sigma^2 I_n$, obținem:

$$\begin{aligned} Var^{\theta}(\tilde{\beta}_n|Z) &= Var^{\theta}((D + (Z'Z)^{-1}Z')u|Z) \\ &= \sigma^2 DD' + \sigma^2(Z'Z)^{-1} \\ &= \sigma^2 DD' + Var^{\theta}(\hat{\beta}_n|Z) \\ &\geq Var^{\theta}(\hat{\beta}_n|Z) \end{aligned}$$

Deoarece $D'D$ este o matrice pozitivă semi-definită, rezultă că într-un eșantion finit, $\tilde{\beta}_n$, este *cel mai bun estimator liniar imparțial* (BLUE) al lui β .

Dacă vom considera proprietățile lui $\hat{\sigma}_n^2$, pentru a demonstra că este un estimator, pornim de la relația:

$$\hat{u} = y - \hat{y} = M_Z y = M_Z(Z\beta + u) = M_Z u, \text{ unde } M_Z Z = 0, \text{ obținem:}$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-q} u' M_Z u.$$

Din calculul acestei probabilități condiționale rezultă:

$$E^u(\hat{\sigma}_n^2|Z) = \frac{1}{n-q} E^u(u' M_Z u|Z) = \frac{1}{n-q} E^u(tr(u' M_Z u)|Z) = \frac{1}{n-q} tr[M_Z E^u(uu'|Z)] = \frac{\sigma^2}{n-q} tr M_Z,$$

și de aici deducem:

$$E^{\theta}(\hat{\sigma}_n^2|Z) = \sigma^2,$$

Dacă acesta este un scalar, atunci $tr(a) = a$; dacă A și B sunt două matrice de dimensiuni apropiate, și în consecință $tr(AB) = tr(BA)$;

De asemenea, rezultă că:

$$\begin{aligned} tr(M_Z) &= tr(I_n) - tr(Z(Z'Z)^{-1}Z') = \\ &= n - tr((Z'Z)^{-1}Z'Z) = n - q \end{aligned}$$

și de aici deducem că:

Se poate arăta de asemenea că

$$\text{Var}^{(j)}(\hat{\sigma}_n^2|Z) = \frac{2\sigma^4}{n-q}.$$

Vom considera că estimatorul maxim al probabilității este imparțial.

Concluzii

Prezentul articol evidențiază principalele noțiuni teoretice generale cu privire la regresia univariată. În context, se prezintă condiționările de care trebuie să se țină seama în construcția și utilizarea regresiei univariată în analizele economice practice. În această analiză se efectuează prezentarea modelului de regresie în termeni de probabilități care, în conformitate cu teoriile exprimate de o serie de econometriști (de exemplu, Spanos), este un model de regresie liniară definit prin ecuația matematică $Y = X\beta + \varepsilon$. În acest model, variabila exogenă considerată devine hotărâtoare. Estimarea parametrului β într-o astfel de funcție se realizează prin metoda celor mai mici pătrate ordinare. Estimatorul pe care îl obținem prin această metodă este, în fapt, estimatorul celor mai mici pătrate ordinare (OLS) al lui β . n prezentarea realizată, considerăm că estimatorul maxim de probabilitate este imparțial. Deși regresia univariată este mai rar utilizată în analizele social-economice, aceasta este recomandabil să fie folosită atunci când, de fapt, regresia este de o formă neliniară.

Bibliografie

1. Andrei, T., Bourbonais, R. (2008). *Econometrie*, Editura Economică, București
2. Ang, A. and G. Bekaert (2007). *Stock return predictability: Is it there?*, Review of Financial studies 20 (3), pp. 651–707
3. Anghelache, C. (2016). *Econometrie teoretică – Ediția a II-a revizuită*, Editura Artifex, București
4. Anghelache, C., Manole Alexandru (2016). *Utilizarea modelului de regresie în analiza corelației dintre situația monetară și balanța de plăți / The use of regression model in analysing the correlation between the monetary situation and the balance of payments*, Romanian Statistical Review, Supplement, no.7, pg. 24-29 / 30-42
5. Anghelache, C., Sacală, C. (2016). *Multiple linear regression used to analyse the correlation between GDP and some variables*, Romanian Statistical Review, Supplement, no.9, pp. 94-99
6. Anghelache, C., Anghel, M.G. (2014). *Using the regression model in the analysis of financial instruments portfolios*, Procedia Economics and Finance, pp. 324-329, Volume 10/2014
7. Anghelache, C. (2011). *Elemente de econometrie aplicată*, Editura Artifex, București
8. Bosq, D. (2012). *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes: Estimation and Prediction*, Springer Science & Business Media
9. Ghysels, E. (2001). *The Econometric Analysis of Seasonal Time Series*, Cambridge University Press
10. Lohr, S.L. (2007). *Comment: Struggles with Survey Weighting and Regression Modeling*, Statistical Science, Vol. 22, No. 2, pp.175–178
11. Newey, W., Powell, J. (2003). *Instrumental variable estimation of nonparametric models*, Econometrica, pp. 1565–1578
12. Pecican, E.Ș. (2009). *Econometria pentru... economiști. Econometrie - teorie și aplicații, ediția a treia*, Editura Economică, București
13. Pesavento, E., Rossi, B. (2006). *Small-sample Confidence Interevals for Multivariate Impulse Response Functions at Long Horizons*, Journal of Applied Econometrics 21(8), pp. 1135–1155