

---

## *Unele aspecte privind extensia testelor Edgeworth la restricțiile non-liniare*

**Prof. univ. dr. Constantin ANGHELACHE**

*Academia de Studii Economice, București, Universitatea „Artifex” din București*

**Prof. univ. dr. Alexandru MANOLE**

*Universitatea „Artifex” din București*

**Conf. univ. dr. Mădălina Gabriela ANGHEL**

*Universitatea „Artifex” din București*

**Drd. Georgiana NIȚU**

*Academia de Studii Economice, București*

### **Abstract**

*Acest articol prezintă unele elemente referitoare la aplicarea testelor Edgeworth asupra restricțiilor non-lineare. Autorii se concentrează asupra regresiei lineare cu ipoteze non-liniare, alegerea variantei și a matricei de ponderi. Se are în vedere faptul că popularitatea testelor Wald este contrabalansată de lipsa de invarianță la modelarea ipotezelor.*

**Cuvinte cheie :** teste Edgeworth, linear, ipoteză, restricție, model

### **Introducere**

Testul Wald este un test popular, mai ales datorită faptului că este ușor de calculat. Însa, s-a demonstrat că testul Wald nu reprezintă cea mai bună alegere în cazul testării ipotezelor neliniare, cel mai frecvent motiv menționat fiind acela că statistica Wald nu este invariantă la formularea algebrică a ipotezei.

Anghelache et. al. (2013), Anghelache și Anghel (2015) se preocupă de aplicarea regresiei în analize economice. Diferite aspecte referitoare la testele Wald au fost studiate și de Kejriwal et. al. (2013), Qihui și Yu (2013).

Park și Philips (1988) au demonstrat că coeficienții de expansiune Edgeworth a statisticii Wald depind de formulare. Pe de altă parte, Newey și West (1987) au propus metoda generalizată de momente (GMM) a distanței pentru ipoteze neliniare. Astfel, în contextul regresiei liniare, statistica lor este funcția GMM evaluată la estimări restrânse. Iar când ipoteza este o restricție liniară asupra parametrilor, atunci testul lor corespunde statisticii Wald. Când ipoteza este nonliniară cele două statistici diferă.

Statistica de distanță GMM este invariantă la formularea algebrică a ipotezei și este robustă la heteroscedasticitate, contrar ratei de probabilitate.

Nu se cunosc foarte multe despre comportamentul statisticii GMM iar acest capitol încearcă să aducă mai multe informații prin extinderea statisticii GMM în cazul considerat de Park și Philips (1988), prin utilizarea matricii explicite la extinderea Edgeworth inițiată de Park și Philips (1988), împingând abordarea lor mai departe, utilizând formulele de matrice explicite pentru toate expresiile noastre, ceea ce va permite realizarea de comparații între statistici.

Rezultatul gasit este acela ca extinderea Edgeworth pentru statistica GMM este o simplificare stricta a statisticii Wald.

### Regresia liniara cu ipoteza nonliniara

Modelul este o regresie liniara de forma:

$$y_i = x_i' \beta + e_i$$

$E(x_i e_i) = 0, i = 1, \dots, n$ , unde  $x_i$  si  $\beta$  sunt fiecare  $k \times 1$ . Fie  $\beta_0$  valoarea reala a lui  $\beta$

Obiectivul este testarea ipotezei nonliniare, prin testarea ipotezei  $H_0$  fata de  $H_1$

$$H_0: g(\beta) = 0$$

$$H_1: g(\beta) \neq 0$$

unde  $g: R^k \rightarrow R$ . (1)

Fie  $\hat{\beta}$  estimatorul lui  $\beta$  calculat prin metoda celor mai mici patrate (OLS)

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \text{ si}$$

$$V_n = (X'X)^{-1} \Omega_n (X'X)^{-1} \quad (2)$$

estimatorul covariantei matricei  $\hat{\beta}$ , unde  $\Omega_n$  – estimator al  $E(x_i x_i' e_i^2)$ .

Testul statistic pentru  $H_0$  este testul Wald, insa principala slabiciune a acestui test o reprezinta faptul ca nu este invariant la formularea ipotezei  $g$ .

Alt test aplicat este functia criteriu GMM pentru modelul de regresie:

$$J(\beta) = (Y - X\beta)' X \Omega_n^{-1} X' (Y - X\beta)$$

Estimatorul nerestrictiv GMM minimizeaza  $J(\beta)$ ,  $\beta \in R^k$ , adica

$$\hat{\beta} = \underset{\beta \in R^k}{\operatorname{argmin}} J(\beta) = (X'X)^{-1}(X'Y) \quad J(\hat{\beta}) = 0$$

si este identic cu estimatorul OLS.

Estimatorul GMM minimizeaza  $J(\beta)$  in functie de conditia (1).

$$\check{\beta} = \underset{g(\beta)=0}{\operatorname{argmin}} J(\beta)$$

Testul statistic de distanta Newey-West este reprezentat de  $DM = J(\check{\beta}) - J(\hat{\beta})$  (4)

Acest test are mai multe avantaje fata de testul Wald, printre care si faptul ca este invariant la formularea ipotezei (1).

### Alegerea variantei si a matricei de ponderi

Statisticile depind de alegerea lui  $\Omega_n$ . Statistica Wald este calculata din estimarile nerestrictive ale lui  $\hat{\beta}$ .

O alegere pentru  $\Omega_n$  este estimatorul Eicker-White

$$\hat{\Omega}_n = \sum_{i=1}^n x_i x_i' \hat{e}_i^2 \quad (5)$$

$$\hat{e}_i = y_i - x_i' \hat{\beta}$$

O alegere alternativa este estimatorul OLS

$$\hat{\Omega}_n^0 = X' X \hat{\sigma}^2 \quad (6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$$

care este valida sub presupunerea conditiei de heteroscedasticitate.

$$E(e_i^2 | x_i) = \sigma^2$$

O alta alternativa ar fi calcularea matricii de greutate sub ipoteza nula, ceea ce presupunea GMM reiterat.

### Extindere Edgeworth

Obiectivul acestei sectiuni este acela de a utiliza argumentul extinderii pentru a demonstra ca statistica GMM are o aproximare Edgeworth la distributia chi-patrat superioara statisticii Wald.

Pornind de la Park si Philips (1988), derivam extinderea presupunand ca  $e|X \sim N(0, I_n)$  si  $X'X = nI_k$ , asadar  $\Omega_n = nI_n$ .

Presupunem ca  $g(\beta)$  este de trei ori continuu diferentiabila

$$G(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} g(\beta), D(\beta) = \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta'} g(\beta), C(\beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} ((vec D(\beta))'),$$

Fie  $G = G(\beta_0)$ ,  $D = D(\beta_0)$  si  $C = C(\beta_0)$

Definim matricele de proiectie

$$P = G(G'G)^{-1}G'$$

$$\bar{P} = 1 - P.$$

Acestea sunt definite daca  $G'G > 0$ , conditie standard pentru testarea ipotezei.

Fie  $F_w$  functia de distributie cumulativa (CDF-cumulative distribution function) a lui W, si fie  $F_{DM}$  functia lui DM si F functia CDF a distributiei  $\chi_1^2$ .

---

**Teorema 1** Extinderea asimptotica a lui  $W$  cand  $n \rightarrow \infty$  este data de

$$F_w(x) = F(x - n^{-1}(G'G)^{-1}(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)) + o(n^{-1}), \quad (7)$$

unde  $\alpha_1 = -1/2 \text{tr}(\bar{P}D\bar{P}D) + 1/4(\text{tr}(\bar{P}D))^2$

$$\alpha_2 = 3/2(\text{tr}(PD))^2 - \text{tr}(PDD) - 1/2 \text{tr}(D)\text{tr}(PD) - 2/3 \text{tr}(PC \otimes G)$$

si  $\alpha_3 = 1/4(\text{tr}(PD))^2$

**Teorema 2** Extinderea asimptotica a lui  $DM$  cand  $n \rightarrow \infty$  este data de

$$F_{DM}(x) = F(x - n^{-1}(G'G)^{-1}\alpha_1 x) + o(n^{-1}), \quad (8)$$

unde  $\alpha_1$  este definit in Teorema 1.

Expresia (7) ofera un set de expresii mai compact pentru coeficientii  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  care permite o comparatie directa cu expresia statisticii GMM. Expresia (8) pentru  $DM$  pare sa fie noua.

Implicatii ale teoremelor 1.1 si 1.2.

- Extinderea statisticii GMM este o simplificare stricta a statisticii Wald.
- $o(n^{-1})$  extinderea statisticii GMM este mai putin distorsionata fata de chi-patrat, decat este fara de statistica Wald.
- Expresia (8) arata ca este necesara doar o ajustare pentru a atinge aproximarea  $o(n^{-1})$  la distributia chi-patrat.
- Invarianta  $\alpha_1$  a formularii (1) este in general adevarata.

### Concluzie

Am extins abordarea matricei explicite la extinderile Edgeworth dezvoltate de Park si Philips (1988), am extins expansiunea Edgeworth pentru statistica Wald si am dezvoltat o noua extindere pentru statistica GMM. Limitarea rezultatelor o reprezinta faptul ca au fost calculate pentru stabilirea restrictive a regresiei normale cu eroare stiuta a variantei.

Raportul simularii a aratat o performanta aproape perfecta a statisticii  $DM^{null}$ .

### Bibliografie

1. Anghelache C., Anghel M.G. (2015) – „Main aspects regarding some non-linear models used in economic analyses”, Romanian Statistical Review Supplement, Volume (Year): 63 (2015), Issue (Month): 9 (September), pp. 7-10
2. Anghelache G.V., Anghelache C., Baltac A.G., Prodan L. (2013) - „Non-linear Regression used in Economic Analysis”, Romanian Statistical Review, Supplement no. 1/2013, pp. 7-18
3. Kejriwal, M. et. al. (2013) – „Wald Tests For Detecting Multiple Structural Changes In Persistence”, Econometric Theory, Volume (Year): 29 (2013), Issue (Month): 02 (April), pp. 289-323

- 
4. Newey W.K., West K.D. (1987) – „*Hypothesis Testing with Efficient Method of Moments Estimation*”, *International Economic Review*, Volume (Year): 28 (1987), Issue (Month): 3 (October), pp. 777-87
  5. Newey W.K., McFadden D. (1986) – „*Large sample estimation and hypothesis testing*”, in R. F. Engle & D. McFadden (ed.), 1986. “*Handbook of Econometrics*,” *Handbook of Econometrics*, Elsevier, edition 1, volume 4, number 4, September.
  6. Phillips P. C. B., Park Joon Y. (1988) – “*On the Formulation of Wald Tests of Nonlinear Restrictions*”, *Econometrica*, Vol. 56, No. 5 (Sep., 1988), pp. 1065-1083
  7. Qihui C., Yu R. (2013) – “*Improvement in finite-sample properties of GMM-based Wald tests*”, *Computational Statistics*, Volume (Year): 28 (2013), Issue (Month): 2 (April), pp. 735-749