
Unele aspecte teoretice privind modelele econometrice neliniare utilizate în analizele economice

Prof. univ. dr. Ioan PARTACHI

Academia de Studii Economice a Moldovei, Chișinău

Conf. univ. dr. Alexandru MANOLE

Universitatea „Artifex” din București

Abstract

Acest articol descrie posibilitățile de utilizare a modelelor econometrice neliniare în analizele economice. Utilizarea acestui tip de modele poate completa analizele efectuate cu ajutorul modelelor lineare, generând un plus de valoare a informațiilor oferite prin aplicarea instrumentelor econometrice.

Cuvinte cheie: *liniar, neliniar, logaritmare, log-log, exponențial*

Evoluția fenomenelor economice nu evoluează întotdeauna după traiectorii liniare, putând fi și neliniare¹.

Analiza corelațiilor dintre variabilele macroeconomice se poate face și după funcții neliniare, care prin transformări sunt liniarizate. Procedăm astfel pentru prezentarea modelului neliniar într-o formă echivalentă simplă și ușor de interpretat valorile parametrilor, sau pentru estimarea acestora².

Astfel, dacă dependența dintre două variabile este reprezentată prin modelul neliniar de regresie, $y_i = a^x \varepsilon_i$, prin logaritmare, obținem modelul de regresie liniar $\ln y_i = \ln b + \ln a \cdot x_i + \ln \varepsilon_i$.

În estimarea parametrilor unui model neliniar de regresie procedăm la estimarea parametrilor aplicând metoda celor mai mici pătrate. Apoi, prin transformări, liniarizăm funcția neliniară, și se estimează parametrii prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate. În final, determinăm parametrii prin metode numerice.

Din punct de vedere econometric modelele liniarizabile prin logaritmare/antilogaritmare, indiferent de forma lor, pot fi cu termen liber sau fără termen liber³.

a. Variațiuni privind modelul log-log

Modelul fără termen liber (log-log) este de forma dependenței date de relația:

$$y_i = ax_i^b \varepsilon_i$$

1. Hendry, D.F. (1995) – „Econometrics and business cycle empirics”, *Economic Journal*, 105

2. Clements, M. P., Hendry, D. F. (1993) – “On the Limitations of Comparing Mean Squared Forecasts Errors”, *Journal of Forecasting*, 12

3. Anghelache, C., Lilea, F.P.C., (2012) - „Econometrie”, Editura Artifex, București

În acest model $a \in R_+^*$ iar $b \in R$. În funcție de semnul parametrului b se stabilesc proprietățile caracteristicii rezultative. Dacă acest parametru este pozitiv, caracteristica rezultativă are o traiectorie crescătoare. Tendința descrescătoare a caracteristicii rezultative este evidențiată, prin modelul neliniar de regresie, de valoarea negativă a exponentului caracteristicii rezultative¹.

Logaritmând relația de mai sus rezultă modelul dublu logaritmic, respectiv:

$$\log y_i = \log a + b \log x_i + \log \varepsilon_i$$

Utilizând substituțiile $y_i^* = k = \log y_i$, $x_i^* = \log x_i$, $a^* = \log a$, $\varepsilon_i^* = \log \varepsilon_i$, modelul liniar de regresie devine:

$$y_i^* = a^* + b x_i^* + \varepsilon_i^*$$

Estimăm cei doi parametri ai modelului liniar de regresie și determinăm parametrul „a” ce apare în modelul neliniar de regresie:

$$\hat{a} = 10^{\hat{a}^*}$$

Modelul cu termen liber (log-log) are în plus un termen liber și se prezintă sub forma²:

$$y_i = a_0 + a x_i^b \varepsilon_i$$

În cazul acestui model nu mai este posibilă aplicarea procedurii anterioare de liniarizare. Pentru estimarea parametrilor, parcurgem următoarele două etape:

- dacă se specifică o valoare a termenului liber al modelului, atunci, utilizând notațiile $v_i = y_i - a_0$ și $u_i = x_i$, se va obține modelul de regresie fără termen liber. Pentru acesta se estimează parametri, conform cazului modelului dublu logaritmic;

- estimăm apoi cei trei parametri ai modelului prin metode numerice. Se poate recurge la transformarea modelului într-unul liniar folosind dezvoltarea seriei Taylor.

Prezentăm câteva proprietăți ale parametrilor ce sunt necesari pentru interpretarea parametrilor modelului și a caracteristicilor variabilei factoriale în raport cu valorile parametrilor. Interpretările sunt realizate în contextul utilizării modelului liniarizat, respectiv:

- dacă $b < 0$, funcția log-log este descrescătoare în raport cu caracteristica factorială. În acest caz $\lim_{x \rightarrow \infty} y_i(x_i) = 0$; în situația modelului cu termen

liber, $\lim_{x \rightarrow \infty} y_i(x_i) = a_0$;

- dacă $b > 0$, funcția neliniară este crescătoare iar $\lim_{x \rightarrow \infty} y_i(x_i) = \infty$;

- indiferent de semnul parametrului b , acesta este egal cu elasticitatea variabilei rezultative calculată în raport cu variabila factorială, adică:

1. Eitheim, Ø., Jansen, E., Nymoen, R. (2002) – “Progress from forecast failure—the Norwegian consumption function”, *Econometrics Journal*, 5

2. Mitruț, C., Șerban, D. (2007) – „Bazele econometriei în administrarea afacerilor”, Editura ASE, București

$$b = \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \cdot \frac{y_i}{x_i};$$

În această situație, dacă derivata de ordinul al doilea este $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2} = ab(b-1)x_i^{b-2}$, rezultă: $b \in (0,1)$. Funcția analitică este crescătoare și

concavă; $b = 1$, modelul de regresie se reduce la modelul simplu liniar, fără termen liber; $b > 1$, funcția este crescătoare și convexă¹.

În continuare vom prezenta câteva posibilități de aducere la liniaritate a unor funcții de regresie specifice și aplicabile în analizele macroeconomice, cum sunt modelele: exponențial, hiperbolic, parabolic, polinomial și multiplicativ.

b. Noțiuni generale privind modelul exponențial

Modelul exponențial se utilizează în cazul în care norul de puncte rezultat în urma reprezentării grafice a seriei de valori $(x_i, y_i)_{i=1,n}$ este orientat de-a lungul curbei unei funcții exponențiale².

Modelul exponențial, cu parametrii a și b , este definit prin relația:

$$y_i = a \cdot b^{x_i} \varepsilon_i, a, b \in R_+^*$$

Estimarea parametrilor modelului exponențial se face prin transformări de date prin logaritmare, parcurgând etapele:

- prin logaritmare termenilor egalității se obține modelul liniar de regresie:

$$\ln y_i = \ln a + \ln b \cdot x_i + \ln \varepsilon_i$$

Modelul devine liniar prin substituirea lui $u_i = \ln y_i, \eta_i = \ln x_i, a^* = \ln a$ și $b^* = b$;

- Estimăm parametrii modelului liniar de regresie, $u_i = a^* + b^* x_i + \eta_i$ folosind metoda celor mai mici pătrate; obținem estimatorii $\hat{a}^*$ și $\hat{b}^*$;

- se determină estimatorii parametrilor modelului de regresie neliniar:

$$\hat{a} = e^{\hat{a}^*} \text{ și } \hat{b} = e^{\hat{b}^*}$$

În final se calculează valorile ajustate pe baza modelului neliniar de regresie estimat:

$$\hat{y}_i = \hat{a}(\hat{b})^{x_i}, i = \overline{1, n}$$

Modelul exponențial se utilizează când valorile variabilei rezultative cresc în progresie aritmetică iar valorile variabilei factoriale cresc în progresie geometrică³.

Pentru a interpreta semnificația parametrului b pornim de la relația:

1. Anghelache, C., Lilea, F.P.C., (2012) - „Econometrie”, Editura Artifex, București

2. Bardsen, G. și colaboratorii (2005) - “The Econometrics of Macroeconomic Modelling”, Oxford University Press

3. Dougherty, C. (2007) – “Introduction to Econometrics”, Oxford University Press

$$b = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

Se observă că parametrul b definește rata de creștere a caracteristicii rezultative în funcție de variabila factorială X .

În modelul exponențial deosebim situațiile:

- b este rata de creștere sau scădere a caracteristicii Y în raport cu X ;
- dacă $b > 1$, evoluția caracteristicii Y este crescătoare;
- când $b \in (0,1)$, caracteristica Y înregistrează o scădere în raport cu variabila X ;
- valorile caracteristicii Y sunt numai pozitive și parametrul a satisface proprietatea de pozitivitate.

Bibliografie selectivă

1. Anghelache, C., Lilea, F.P.C., (2012) - „Econometrie”, Editura Artifex, București
2. Bardsen, G. și colaboratorii (2005) - “The Econometrics of Macroeconomic Modelling”, Oxford University Press
3. Clements, M. P., Hendry, D. F. (1993) – “On the Limitations of Comparing Mean Squared Forecasts Errors”, Journal of Forecasting, 12
4. Dougherty, C. (2007) – “Introduction to Econometrics”, Oxford University Press
5. Eitrheim, Ø., Jansen, E., Nymoen, R. (2002) – “Progress from forecast failure—the Norwegian consumption function”, Econometrics Journal, 5
6. Hayashi, E (2000) – „Econometrics”. Princeton: Princeton University Press.
7. Hendry, D.F. (1995) – „Econometrics and business cycle empirics”, Economic Journal, 105
8. Mitruț, C., Șerban, D. (2007) – „Bazele econometriei în administrarea afacerilor”, Editura ASE, București
9. Newey, W. K. (1985) - “Generalized method of moments specification testing,” Journal of Econometrics, 29,229-256.
10. Sargan, J. D. (1958) - “The estimation of economic relationships using instrumental variables,” Econometrica, 26,393-415